

SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA V NITRE

FAKULTA EKONOMIKY
A MANAŽMENTU

KATEDRA ŠTATISTIKY
A OPERAČNÉHO VÝSKUMU

DOC. RNDR. MAGDALÉNA Š I M K O V Á, CSc.

OPTIMÁLNE PROGRAMOVANIE

(PRVÉ VYDANIE)

2001

**VYDALA SLOVENSKÁ POĽNOHOSPODÁRSKA UNIVERZITA V NITRE
VO VYDAVATEĽSKOM A EDIČNOM STREDISKU SPU**

2 LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Lineárne programovanie (ďalej LP) je najrozpracovanejšou disciplínou matematického programovania. Základy LP vznikli nezávisle na sebe na viacerých miestach a v rozličnom čase. V roku 1939 publikoval ruský matematik L. V. Kantorovič, nositeľ Nobelovej ceny za ekonómiu (1975), prácu “Matematické metody pri riadení a plánovaní podniku”, v ktorej čiastočne formuloval problematiku ako úlohu LP. V roku 1941 vyšla práca Angličana F. Hitchcocka o dopravnej úlohe ako špeciálnom prípade LP. Uvedenému problému sa nezávisle venoval Američan T. C. Koopmans, nositeľ Nobelovej ceny za ekonómiu (1975), ktorý prácu publikoval v roku 1945. Na teoretickom rozvoji LP má najväčšiu zásluhu G. B. Dantzig, ktorý v roku 1947 publikoval algoritmus simplexovej metódy. V súvislosti s rozvojom LP je potrebné z veľkého počtu vedcov ešte spomenúť R. W. Fogela a D. C. Northa, nositeľov Nobelovej ceny za ekonómiu (1993), L. Hurwicza, C. Lemkeho, P. Wolfeho, A. Charnesa, ale i mnohých ďalších.

V tejto kapitole venujeme pozornosť formulácii ekonomicko-matematického modelu LP ako i teoretickým princípom, na ktorých sú založené metódy riešenia úloh LP. Kapitola obsahuje všeobecnú metódu riešenia úloh LP - simplexovú metódu. Ďalej sa tu venujeme problematike duality v LP. Obsahom kapitoly je tiež interpretácia výsledkov získaných riešením úloh LP vrátane analýzy senzitivnosti.

2.1 Formulácia niektorých typických úloh lineárneho programovania

Ako úlohy LP možno riešiť veľmi širokú paletu rozličných rozhodovacích situácií týkajúcich sa optimálneho využitia surovín, materiálu, plôch, časového fondu strojov a zariadení, počtu pracovníkov, investičných a finančných problémov a podobne. Diskusiu o úlohách LP začneme matematickou formuláciou niektorých typických úloh, ktoré možno riešiť ako úlohy LP. Ako úlohy LP však možno formulovať i mnohé ďalšie problémy, ktoré sú z tematického hľadiska zaradené do iných disciplín metód operačného výskumu. Niektoré uvádzame v častiach 3, 5 a 6.

1. Alokačné problémy

Ide tu o veľkú skupinu úloh zameraných na hľadanie najefektívnejšieho využitia (alokácie) výrobných zdrojov, resp. optimálnej výrobnéj štruktúry výrobných subjektov, ktoré patria ku klasickým úlohám ekonomického rozhodovania.

Príklad 2.1.

Uvažujme zjednodušený rozhodovací výrobný-ekonomický problém, v rámci ktorého výrobná jednotka uvažuje s možnosťou výroby štyroch druhov výrobkov V_1, V_2, V_3, V_4 a pri ich výrobe používa dve rozdielne suroviny S_1, S_2 . Spotreba surovín na jednu jednotku výrobku, disponibilné množstvá surovín v plánovacom období, ako i realizačné ceny jednotky výrobkov sú uvedené v tabuľke 2.1. Úlohou je navrhnúť takú kombináciu výroby, ktorá na báze disponibilných zdrojov zabezpečí maximálny objem produkcie v realizačných cenách.

Riešenie:

Stanoviť pre plánovacie obdobie výrobný program, pri ktorom výrobná jednotka dosiahne maximálnu úhrnnú hodnotu vyrobenej produkcie, vyžaduje definovať ako premenné veličiny množstvá jednotlivých výrobkov. Označme tieto množstvá nasledovnými premennými:

x_j = počet jednotiek výrobku V_j , pričom $j = 1, 2, 3, 4$.

Je zrejmé, že výrobný subjekt nemôže vyrábať záporné množstvá výrobkov. Uvedenú požiadavku vyjadríme tzv. podmienkami nezápornosti premenných, t.j. $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$.

Vstupné údaje príkladu 2.1

Tabuľka 2.1

Výrobok	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	Disponibilné množstvo surovín
Surovina	Spotreba suroviny na jednotku výrobku				
S ₁	2	3	6	5	300
S ₂	4	8	2	7	200
Realizačná cena jednotky výrobku	20	30	15	10	

Za účelom dosiahnutia čo najväčšieho objemu produkcie musí výrobná jednotka čo najviac vyrábať. Výroba jednotky jednotlivých výrobkov spotrebuje určité množstvo surovín, ktorých však je k dispozícii iba obmedzené množstvo. Vzťahy medzi potrebou jednotlivých surovín a ich disponibilným množstvom vyjadríme nasledovnými nerovnicami:

$$\text{Surovina } S_1 : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 300$$

$$\text{Surovina } S_2 : 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 200$$

Ľavé strany uvedených nerovnic vyjadrujú potrebu jednotlivých surovín na výrobu výrobkov v množstvách x_1 , x_2 , x_3 a x_4 jednotiek, pravé strany nerovnic obsahujú disponibilné množstvá surovín na celé plánovacie obdobie, ktoré nemôžu byť prečerpané.

Výrobný subjekt môže svoj výrobný program kombinovať výrobou rozličných množstiev jednotlivých výrobkov. Požiadavku, aby výrobou dosiahol maximálny objem produkcie v realizačných cenách vyjadríme matematicky vzťahom:

$$f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 10x_4,$$

kde výraz na pravej strane funkcie f vyjadruje celkovú hodnotu objemu produkcie v realizačných cenách.

Výrobný program volíme taký, aby funkcia f dosiahla maximum na množine riešení uvedených nerovnic pri rešpektovaní podmienok nezápornosti premenných.

Príklad 2.2.

Farmár sa rozhoduje, v akom pomere rozdelí 7 ha ornej pôdy medzi pšenicu a kukuricu na zrnó. Očakávaná úroda pšenice je 5500 kg na hektár, kukurice 6100 kg na hektár. K dispozícii na celkové náklady má 130000 Sk, pričom na hektár pšenice uvažuje s nákladmi 9700 Sk a na hektár kukurice s 13040 Sk. Farmár má uzavretú hospodársku zmluvu na minimálne 40000 kg zrnín. Očakávaná cena za 1000 kg pšenice činí 3875 Sk, kukurice 4165 Sk. Úlohou je navrhnúť rozdelenie ornej pôdy medzi pšenicu a kukuricu na zrnó tak, aby bola dosiahnutá maximálna tržová produkcia.

Riešenie:

Výsledkom rozhodnutia farmára je stanovenie veľkostí plôch pre uvažované plodiny. Pretože uvedené plochy sú neznáme, definujeme ich ako premenné veličiny nasledovným spôsobom:

x_1 výmera ornej pôdy pre pestovanie pšenice v ha

x_2 výmera ornej pôdy pre pestovanie kukurice v ha

Je zrejmé, že veľkosť plôch nemôže byť záporná, čiže neznáme veličiny musia spĺňať podmienky nezápornosti

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Podmienky, ktoré musia uvedené neznáme veličiny spĺňať, sformulujeme nasledovným spôsobom:

1. Výmera ornej pôdy, ktorú treba celú rozdeliť je 7 ha, čiže musí platiť rovnica

$$x_1 + x_2 = 7.$$

2. Zabezpečenie uzavretej hospodárskej zmluvy na minimálne 40000 kg zrnín vyjadríme nerovnicou typu $\geq$, v ktorej ľavá strana vyjadruje očakávanú produkciu zrnín a pravá strana minimálne požadované množstvo. Obidve strany nerovnice sú vyjadrené v 1000 kg.

$$5,5x_1 + 6,1x_2 \geq 40.$$

3. Neprekročenie hodnoty určenej na celkové náklady vyjadríme nerovnicou typu $\leq$, v ktorej ľavá strana vyjadruje očakávané náklady na uvažované plodiny a pravá strana disponibilné prostriedky v hodnote 130000 Sk, ktorá nemôže byť prekročená. Podmienka je vyjadrená v 1000 Sk.

$$9,7x_1 + 13,04x_2 \leq 130.$$

Cieľom riešenia uvedených podmienok je navrhnúť také rozdelenie ornej pôdy medzi pšenicu a kukuricu na zrno, aby sa dosiahla maximálna trhová produkcia. Tento cieľ vyjadríme matematicky nasledovnou funkciou:

$$f = 3,875.5,5x_1 + 4,165.6,1x_2 = 21,3125x_1 + 25,4065x_2,$$

kde výraz na pravej strane funkcie f vyjadruje hodnotu trhovej produkcie vyjadrenú v 1000 Sk.

Výrobný program volíme taký, aby funkcia f dosiahla maximum na množine riešení uvedených nerovníc pri rešpektovaní podmienok nezápornosti premenných.

2. Zmiešavacie problémy

Ide o tzv. nutričné (výživové) problémy, v ktorých sa stanovuje najlacnejšia kombinácia potravín (krmív) tak, aby v úhrne obsahovala všetky biologicky účinné zložky v požadovanom množstve. Zmiešavacie problémy sa tiež nazývajú problémy najlacnejších diét.

Príklad 2.3.

Krmná zmes musí obsahovať maximálne 24,5 jednotiek zložky L_1 , aspoň 38 jednotiek zložky L_2 a aspoň 43 jednotiek zložky L_3 . Zmes možno vyrobiť zo štyroch druhov krmív K_1 , K_2 , K_3 , K_4 . Obsah zložiek v krmivách a náklady na jednotku krmív (ceny) sú uvedené v tabuľke 2.2. Úlohou je určiť množstvá krmív K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , zmiešaním ktorých získame krmnú zmes s požadovaným obsahom zložiek L_1 , L_2 , L_3 tak, aby náklady na krmnú zmes boli najnižšie.

Vstupné údaje pre príklad 2.3

Tabuľka 2.2

Krmivá	K_1	K_2	K_3	K_4
Zložky	Obsah zložiek v krmivách			
L_1	4	3	6	5
L_2	6	5	8	7
L_3	3	7	9	7
Náklady na jednotku krmiva	15	18	24	26

Riešenie:

Definujeme požadované množstvá krmív v krmnej zmesi ako neznáme veličiny x_j , $j = 1, 2, 3, 4$, kde x_j je požadované množstvo suroviny K_j . Je zrejmé, že uvedené neznáme veličiny musia spĺňať podmienky nezápornosti, čiže $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Požiadavku na zabezpečenie požadovaného množstva jednotlivých zložiek v krmnej zmesi vyjadríme matematicky nasledovnými nerovnicami:

$$\text{Zložka } L_1: 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 24,5$$

$$\text{Zložka } L_2: 6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 \geq 38$$

$$\text{Zložka } L_3: 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 \geq 43.$$

Ľavé strany nerovníc vyjadrujú celkové množstvo jednotlivých zložiek v krmovínovej zmesi, ktoré sa získajú z množstiev x_1 , x_2 , x_3 a x_4 jednotlivých surovín, pravé strany vyjadrujú maximálne (zložka L_1), prípadne minimálne (zložky L_2 , L_3) požadované hodnoty jednotlivých zložiek v krmnej zmesi.

Cieľom riešenia uvedených podmienok je navrhnúť zloženie krmnej zmesi s minimálnymi nákladmi. Tento cieľ vyjadríme matematicky nasledovnou funkciou:

$$f = 15x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 26x_4,$$

kde výraz na pravej strane funkcie f vyjadruje úhrnné náklady na krmnu zmes. Množstvá krmív volíme tak, aby funkcia f dosiahla minimum na množine riešení uvedených nerovníc pri rešpektovaní podmienok nezápornosti premenných.

3. Rezný problém

Příklad 2.4.

Podnik potrebuje zabezpečiť pre svoju výrobu tri druhy kovových tyčí T_1 o dĺžke 90 cm, T_2 o dĺžke 70 cm a T_3 o dĺžke 50 cm v množstvách 600 kusov tyčí T_1 , 500 kusov tyčí T_2 a 1200 kusov tyčí T_3 . K dispozícii sú iba tyče o štandardnej dĺžke 190 cm, ktoré treba rezať, pričom prípustné sú iba také spôsoby rezania tyčí, pri ktorých odpad nie je väčší ako 40 cm. Úlohou je navrhnúť taký rozvrh rezania tyčí, aby potreba štandardných tyčí bola minimálna.

Riešenie:

Najskôr preskúmame, akými spôsobmi možno rezať tyč štandardnej dĺžky, aby odpad nebol väčší ako 40 cm. Varianty rezania sú uvedené v tabuľke 2.3.

Spôsoby rezania tyče o štandardnej dĺžke

Tabuľka 2.3

Druhy tyčí	Varianty rezania tyče o štandardnej dĺžke					
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
T_1 (90cm)	2	0	1	0	1	0
T_2 (70cm)	0	2	0	0	1	1
T_3 (50cm)	0	1	2	3	0	2
Odpad	10	0	0	40	30	20

Označme ako premenné x_j počet tyčí o štandardnej dĺžke 190 cm, ktoré treba rezať j -tým spôsobom, $j = 1, 2, \dots, 6$. Počet tyčí nemôže byť záporný, čiže premenné musia spĺňať podmienky nezápornosti, t. j. $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, 6$.

Požiadavky narezat' práve požadovaný počet tyčí T_1, T_2, T_3 vyjadríme matematicky nasledovnými rovnicami:

$$\text{Narezat' tyče } T_1: 2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 0x_6 = 600$$

$$\text{Narezat' tyče } T_2: 0x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 + 1x_6 = 500$$

$$\text{Narezat' tyče } T_3: 0x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 0x_5 + 2x_6 = 1200$$

Cieľom riešenia je minimalizovať spotrebu tyčí o štandardnej dĺžke, čo matematicky vyjadríme funkciou

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6,$$

kde neznáme volíme tak, aby funkcia f dosiahla minimum na množine riešení uvedených rovníc pri rešpektovaní podmienok nezápornosti premenných. V prípade, že uvedená sústava rovníc nemá riešenie, nahradíme symboly rovnosti nerovnosťami typu $\geq$.

4. Personálny problém

Príklad 2.5.

Firma s nepretržitou prevádzkou potrebuje v priebehu týždňa v jednotlivých dňoch nasledovný počet zamestnancov:

1. Pondelok	17
2. Utorok	14
3. Streda	15
4. Štvrtok	19
5. Piatok	14
6. Sobota	16
7. Nedeľa	11

Podľa dohody s odbormi, ak zamestnanec pracuje súvisle päť dní, potom má nárok na dva dni voľna. Riešte daný problém tak, aby počet zamestnancov na plný úväzok bol minimálny.

Riešenie:

Ako neznáme veličiny definujeme počet zamestnancov v jednotlivých dňoch, čiže x_j , $j = 1, 2, \dots, 7$ predstavuje počet zamestnancov zaradených do práce v j -tom dni v týždni. Je zrejmé, že uvedené neznáme veličiny musia spĺňať podmienky nezápornosti, t. j. $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, 7$.

Dohodu s odbormi vyjadríme nasledovnými rovnicami, ktorými zabezpečíme požadovaný počet pracovníkov na všetky dni v týždni, t. j.

1. Pondelok	x_1			$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$= 17$
2. Utorok	x_1	$+x_2$			$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$= 14$
3. Streda	x_1	$+x_2$	$+x_3$			$+x_6$	$+x_7$	$= 15$
4. Štvrtok	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$			$+x_7$	$= 19$
5. Piatok	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$			$= 14$
6. Sobota		$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$		$= 16$
7. Nedeľa			$+x_3$	$+x_4$	$+x_5$	$+x_6$	$+x_7$	$= 11$

Cieľ riešenia, ktorým je minimalizácia počtu zamestnancov na plný úväzok, matematicky vyjadríme funkciou

$$f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7,$$

kde neznáme volíme tak, aby funkcia f dosiahla minimum na množine riešení uvedených rovníc pri rešpektovaní podmienok nezápornosti premenných. Analogicky ako v predchádzajúcom

X _{1 1} +				X _{2 1}						= 300
	X _{1 2} +					X _{2 2}				= 250
		X _{1 3} +					X _{2 3}			= 200
			X _{1 4} +					X _{2 4}		= 400
				X _{1 5} +					X _{2 5}	= 200

Cieľom riešenia problému je stanoviť taký plán prepravy tovaru z veľkoskladov do predajní, aby celkové tonkilometre súvisiace s rozvozom boli minimálne. Za tým účelom sformulujeme matematicky uvedené celkové náklady nasledovnou funkciou:

$$f = 18x_{11} + 16x_{12} + 21x_{13} + 9x_{14} + 14x_{15} + 29x_{21} + 17x_{22} + 25x_{23} + 7x_{24} + 10x_{25}.$$

Plán rozvozu volíme taký, pri ktorom funkcia f dosiahne minimum na množine riešení uvedených rovníc pri rešpektovaní podmienok nezápornosti premenných.

6. Prirad'ovací problém

Rovnako ako dopravná úloha i prirad'ovací problém patrí medzi tzv. distribučné úlohy a formuluje sa ako špeciálny prípad dopravnej úlohy. Vyznačuje sa tým, že premenné veličiny môžu nadobúdať iba hodnoty 0 alebo 1. Na riešenie prirad'ovacieho problému existujú špeciálne algoritmy.

Príklad 2.7.

Tri špecializované stroje umiestnené na troch rôznych lokalitách sa po skončení práce majú presunúť na iné tri lokality. Vzdialenosti medzi pôvodnými a novými lokalitami sú uvedené v tabuľke 2.5. Úlohou je navrhnúť taký presun strojov na nové lokality, ktorý sa uskutoční pri minimálnych celkových kilometroch.

Vstupné údaje pre príklad 2.7

Tabuľka 2.5

Nové lokality Pôvodné lokality	NL ₁	NL ₂	NL ₃
PL ₁	18	20	9
PL ₂	17	22	15
PL ₃	20	15	25

Riešenie:

Neznáme veličiny $x_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$ vyjadrujú, ak:

- $x_{ij} = 1$ presun strojov medzi pôvodnými a novými lokalitami sa realizuje
- $x_{ij} = 0$ presun strojov medzi pôvodnými a novými lokalitami sa nerealizuje.

Úlohu sformulujeme ako dopravnú úlohu, iba na pravé strany riadkových a stĺpcových rovníc dáme hodnoty 1. Potom

$$\begin{array}{rcl}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} & & = 1 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} & = 1 \\
 & & x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\
 \\
 x_{11} + & & x_{21} + & & x_{31} & & = 1 \\
 & x_{12} + & & x_{22} + & & x_{32} & = 1 \\
 & & x_{13} + & & x_{23} + & & x_{33} = 1
 \end{array}$$

Cieľom riešenia problému je stanoviť taký plán presunu strojov z pôvodných na nové lokality, aby celkové kilometre súvisiace s presunom boli minimálne. Za tým účelom sformulujeme matematicky uvedené celkové kilometre nasledovnou funkciou:

$$f = 18x_{11} + 20x_{12} + 9x_{13} + 17x_{21} + 22x_{22} + 15x_{23} + 20x_{31} + 15x_{32} + 25x_{33}.$$

Plán presunu volíme taký, pri ktorom funkcia f dosiahne minimum na množine riešení uvedených rovníc pri rešpektovaní podmienok stanovených pre neznáme veličiny.

2.2 Ekonomicko-matematický model úlohy lineárneho programovania

Z matematickej formulácie typických úloh, ktoré možno riešiť ako úlohy LP je zrejmé, že ak chceme nejaký problém matematicky vyjadriť ako úlohu LP, musíme v prvom rade definovať odpovedajúce neznáme veličiny, ktorých hodnoty chceme určiť. Ďalej je potrebné poznať možnosti, ktoré máme, resp. obmedzenia, podmienky alebo ohraničenia, ktoré sa musia pri realizácii cieľa rešpektovať. Vyjadrujeme ich sústavou lineárnych rovníc alebo nerovníc typu “ $\leq$ ”, príp. “ $\geq$ ”. Ide o sústavu tzv. obmedzujúcich podmienok. Súčasťou obmedzujúcich podmienok sú i podmienky nezápornosti premenných.

Úlohou je nájsť také riešenie, ktoré je najlepšie z hľadiska cieľa, ktorý riešením problému sledujeme. Uvedený cieľ vyjadrujeme matematickou funkciou, ktorá má byť charakter maximalizácie alebo minimalizácie. Nazveme ju účelovou (kriteriálnou) funkciou. Extrém účelovej funkcie hľadáme na oblasti, ktorú vymedzujú obmedzujúce podmienky. Ide tu teda o viazaný globálny extrém.

Takto formulovaná úloha predstavuje ekonomicko-matematický model príslušnej úlohy.

Ekonomicko-matematické modely úloh LP sú lineárne, deterministické a statické. To znamená, že všetky matematické vzťahy v modeli sú lineárne funkcie (lineárne rovnice alebo nerovnice), vstupné a výstupné údaje sú konštanty, model je formulovaný pre jedno konkrétne obdobie a jeho výsledky nezohľadňujú zmeny v čase.

2.2.1 Všeobecný tvar ekonomicko-matematického modelu úlohy LP

Všeobecný tvar ekonomicko-matematického modelu úlohy LP definujeme nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.1)$$

Obmedzujúce podmienky:

[illegible]

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

kde použité symboly mají následovný význam:

$x_j, j = 1, 2, \dots, n$ sú neznáme, tzv. štruktúrne premenné, ktorých hodnoty chceme vypočítať

$c_j, j = 1, 2, \dots, n$ sú ocenenia (ohodnotenia) neznámych veličín

a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ sú štruktúrne koeficienty vyjadrené na jednu jednotku štruktúrnej premennej

$b_i, i = 1, 2, \dots, m$ sú hodnoty požiadaviek alebo zdrojov.

Jednotlivé části modelu vyjadrujú:

- Funkcia f (vzťah (2.1)) je účelová (kriteriálna) funkcia, ktorá vyjadruje cieľ, ktorý sa riešením úlohy sleduje.

- Sústava rovníc a nerovníc (vzt'ahy (2.2)) predstavuje m obmedzujúcich podmienok, ktoré treba pri hľadaní cieľa úlohy rešpektovať. Majú buď charakter zdrojov (podmienky typu $\leq$), kde hodnoty b_i vyjadrujú ich horné hranice, ktoré nemôžu byť prekročené, buď charakter požiadaviek (podmienky typu $\geq$), kde hodnoty b_i vyjadrujú ich dolné hranice, ktoré musia byť splnené aspoň na dolnej hranici alebo ide o direktívne podmienky (podmienky typu $=$), kde b_i vyjadrujú hodnoty, ktoré musia byť presne splnené. Vzhľadom na svoj charakter sa tiež nazývajú vlastné alebo základné obmedzujúce podmienky.
- Vzt'ah (2.3) vyjadruje podmienky nezápornosti štruktúrnych premenných.

Všeobecný EMM úlohy LP možno tiež vyjadriť v nasledovných matematických tvaroch:

- v sumačnom tvare:

Účelová funkcia:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.4)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.5)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

- v maticovom tvare:

Účelová funkcia:

$$f = \vec{c}^T \vec{x} \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.7)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$A\vec{x} (\leq, \geq, =) \vec{b} \quad (2.8)$$

Podmienky nezápornosti:

$$\vec{x} \geq \vec{0} \quad (2.9)$$

kde

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{c}^T = (c_1, c_2, \dots, c_n), A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

- vo vektorovom tvare:

Účelová funkcia:

$$f = \vec{c}^T \vec{x} \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.10)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n (\leq, \geq, =) \vec{b} \quad (2.11)$$

$$\text{Podmienky nezápornosti: } \vec{x} \geq \vec{0} \quad (2.12)$$

kde $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2, \dots, n$ sú vektory koeficientov pri jednotlivých premenných x_j .

2.2.2 Štandardný a kánonický tvar ekonomicko-matematického modelu úlohy LP

Z hľadiska riešenia úlohy LP je vhodné upraviť príslušný EMM na štandardný a kánonický tvar.

Úloha LP je v štandardnom tvare, ak všetky jej vlastné obmedzujúce podmienky sú rovnice.

EMM úlohy LP vyjadrený v štandardnom tvare zapíšeme všeobecne nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.13)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.15)$$

Transformácia všeobecnej úlohy LP na úlohu v štandardnom tvare sa uskutočňuje pomocou tzv. **doplnkových premenných**, ktorými sa transformujú obmedzujúce podmienky v tvare nerovníc na podmienky v tvare rovníc rozšírením ľavej strany príslušnej nerovnice o doplnkovú premennú tak, že

- doplňková premenná je na ľavej strane nerovnice typu $\leq$ pripočítaná,
- doplňková premenná je na ľavej strane nerovnice typu $\geq$ odpočítaná.

Doplňková premenná je nezáporná premenná, ktorej dávame do účelovej funkcie zvyčajne nulové ocenenie.

V EMM vyjadrenom všeobecne vzťahmi (2.13)-(2.15) premenné $x_1, x_2, \dots, x_n$ obsahujú i doplnkové premenné.

Za účelom rozlíšenia obsahu jednotlivých premenných budeme v konkrétnych príkladoch označovať doplnkové premenné symbolom d_i ; $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Čiže označenie x_j bude potom prináležať iba štruktúrnym premenným. Je logické, že z hľadiska matematického riešenia príslušného modelu sú štruktúrne i doplnkové premenné rovnocenné. Vo všeobecných vyjadreniach ekonomicko-matematických modelov symboly štruktúrnych i doplnkových premenných nebudeme rozlišovať.

Predpokladajme, že v úlohe LP v štandardnom tvare sú hodnoty $b_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ a počet neznámych (štruktúrne i doplnkové premenné) je väčší ako počet lineárne nezávislých rovníc, t. j. $n > m$.

Príklad 2.8.

Vyjadrime EMM úlohy uvedenej v príklade 2.2 v štandardnom tvare.

Riešenie:

Prvá obmedzujúca podmienka je rovnica, takže zostane bez zmeny. Druhá obmedzujúca podmienka je vyjadrená v tvare nerovnice typu $\geq$, preto na jej ľavej strane odpočítame doplnkovú premennú d_1 . Tretia obmedzujúca podmienka je vyjadrená v tvare nerovnice typu $\leq$, preto k jej ľavej strane pripočítame doplnkovú premennú d_2 . Do účelovej funkcie dáme doplnkovým premenným nulové ocenenia.

EMM uvedenej úlohy v štandardnom tvare je nasledovný:

Účelová funkcia:

$$f = 21,3125x_1 + 25,4065x_2 + 0d_1 + 0d_2 \rightarrow \text{maximum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & & = 7 \\ 5,5x_1 + 6,1x_2 - d_1 & & = 40 \\ 9,7x_1 + 13,04x_2 + d_2 & & = 130 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0.$$

Úloha LP je v kánonickom tvare, ak matica koeficientov v obmedzujúcich podmienkach úlohy v štandardnom tvare obsahuje jednotkovú maticu typu $m \times m$ ako submaticu. Kánonický tvar EMM úlohy LP, ktorý je ekvivalentný s úlohou v štandardnom tvare, dostaneme Gausovou-Jordanovou metódou úplnej eliminácie. Predpokladajme, že v sústave (2.14) sú všetky rovnice lineárne nezávislé. Ich úpravu na kánonický tvar realizujeme pri premenných $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Kánonický tvar EMM úlohy LP za uvedených podmienok možno vyjadriť všeobecne nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.16)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + & \alpha_{1m+1}x_{m+1} + \alpha_{1m+2}x_{m+2} + \dots + \alpha_{1n}x_n & = \beta_1 \\ 1x_2 + & \alpha_{2m+1}x_{m+1} + \alpha_{2m+2}x_{m+2} + \dots + \alpha_{2n}x_n & = \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1x_m + & \alpha_{mm+1}x_{m+1} + \alpha_{mm+2}x_{m+2} + \dots + \alpha_{mn}x_n & = \beta_m \end{array} \quad (2.17)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

V prípade, že eliminujeme premenné $x_1, x_2, \dots, x_m$ i v účelovej funkcii (2.16), v ktorej za tým účelom dáme premenné na ľavú stranu, táto nadobudne nasledovný tvar:

$$f + 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_m + \gamma_{m+1}x_{m+1} + \gamma_{m+2}x_{m+2} + \dots + \gamma_n x_n = \beta_0. \quad (2.19)$$

Potom hovoríme, že EMM vyjadrený vzťahmi (2.17)-(2.19) je v **úplnom kánonickom tvare**.

2.3 Teoretické princípy riešenia úlohy lineárneho programovania

Riešiť úlohu LP vo všeobecnosti znamená nájsť na množine riešení vlastných obmedzujúcich podmienok úlohy a podmienok nezápornosti premenných extrém (maximum alebo minimum) účelovej funkcie.

Riešenia, ktoré spĺňajú vlastné obmedzujúce podmienky vrátane podmienok nezápornosti premenných, t. j. vzťahy (2.2)-(2.3), sa nazývajú **prípustné riešenia**.

Prípustné riešenie (riešenia), v ktorom účelová funkcia (2.1) nadobúda svoj extrém je **riešenie optimálne**.

2.3.1 Grafické riešenie úloh LP s dvoma premennými

Napriek tomu, že praktické úlohy s dvoma premennými sa vyskytujú zriedka, je užitočné venovať pozornosť grafickému riešeniu úloh tohto typu najmä preto, že ich geometrická interpretácia poskytuje názornú predstavu o podstate optimalizačného problému a zjednodušuje pochopenie základnej ideí, na ktorej spočíva riešenie úloh LP.

Pri grafickom riešení úlohy LP postupujeme nasledovným spôsobom:

1. V rovine zobrazíme množinu bodov, ktoré predstavujú množinu prípustných riešení. Získame ich ako prienik množín riešení odpovedajúcich jednotlivým obmedzujúcim podmienkam v 1. kvadrante. Uvedené množiny riešení predstavujú v prípade obmedzujúcich podmienok typu nerovníc ($\leq$, $\geq$) niektorú z polrovín, ktoré vymedzuje deliaca priamka. Ak je obmedzujúca podmienka rovnicou, množinu riešení predstavujú body na odpovedajúcej priamke. V súvislosti s hľadaním množiny prípustných riešení môžu nastať tri prípady:
 - a) Sústava obmedzujúcich podmienok je konzistentná a jej riešením pri zohľadnení podmienok nezápornosti premenných sú body v 1. kvadrante ohraničenej konvexnej množiny s konečným počtom krajných bodov (priesečníky hraničných priamok odpovedajúcich jednotlivým podmienkam). Množina prípustných riešení tvorí v rovine tzv. konvexný mnohoúhelník (polyéder), prípadne v priestore konvexný mnohosten.
 - b) Sústava obmedzujúcich podmienok je konzistentná a jej riešením pri zohľadnení podmienok nezápornosti premenných sú body v 1. kvadrante neohraničenej konvexnej množiny s konečným počtom krajných bodov.
 - c) Sústava obmedzujúcich podmienok je nekonzistentná a množina prípustných riešení je prázdnu množinou.
2. V prípade a) stanovíme optimálne riešenie (riešenia) tak, že určíme bod (body) množiny prípustných riešení, v ktorých nadobúda účelová funkcia požadovaný extrém (maximum).

Za tým účelom zobrazíme gradient účelovej funkcie $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$ v bode $x_1 = 0$,

$x_2 = 0$ (smerový vektor), ktorý predstavuje smer najrýchlejšieho rastu na účelovej funkcii a priamku, kolmú na gradient, t.j. smernicu účelovej funkcie. Potom kreslíme rovnobežky so smernicou účelovej funkcie dovtedy, kým sa jedna z nich nedostane do polohy opornej priamky voči množine prípustných riešení (ak existuje). Bod (body), ktorý je súčasťou opornej priamky ako aj množiny prípustných riešení, je bod (body), v ktorom účelová funkcia nadobúda svoj extrém. Takýto bod (body) leží vždy aspoň v jednom z krajných bodov množiny prípustných riešení. Ak je takýchto bodov nekonečne veľa, potom aspoň dva z nich ležia v krajných bodoch a ostatné sú lineárnou konvexnou kombináciou týchto krajných bodov. Čiže ak existuje optimálne riešenie úlohy LP, nachádza sa v krajnom bode (bodoch) množiny prípustných riešení. (v prípade minima vynásobíme účelovú funkciu číslom (-1)).

Príklad 2.9.

Pre nasledovnú úlohu LP nájdime grafickou metódou optimálne riešenie.

Účelová funkcia:

$$f = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \text{maximum} \quad (1)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$20x_1 + 40x_2 \leq 2000 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 70 \quad (3)$$

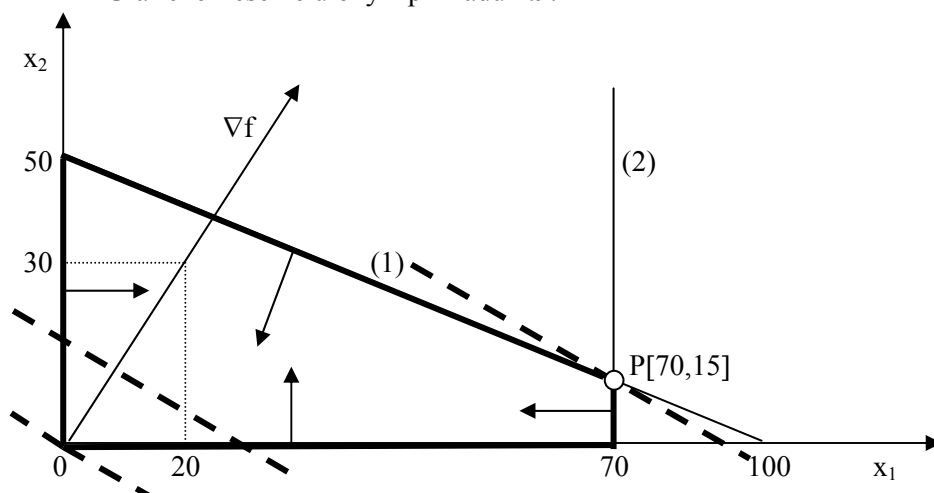
Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

Riešenie:

1. Určíme polroviny, ktorých body sú riešeniami jednotlivých nerovnic (2)-(3) v obmedzujúcich podmienkach. Za tým účelom pre každú nerovnicu znázorníme najprv deliacu priamku, ktorá je zobrazením odpovedajúcej rovnice a ktorá rozdeľuje rovinu na dve polroviny. Zistíme, ktorá z týchto polrovín predstavuje množinu riešení odpovedajúcej nerovnice (napr. tak, že dosadíme do nerovnice ľubovoľný bod z niektorej polroviny). Zodpovedajúce polroviny sú na obr. 2.1 označené šípkami na deliacich priamkach, ktoré sú označené číslami príslušných obmedzujúcich podmienok. Riešením sústavy obmedzujúcich podmienok úlohy, ako i podmienok nezápornosti (4) sú body 1. kvadrantu, ktoré sú prienikom všetkých polrovín, ktoré odpovedajú sústave nerovnic. Uvedený prienik tvorí množinu prípustných riešení úlohy, ktorá je na obr. 2.1 vyznačená hrubšími čiarami. Z obr. 2.1 vidíme, že množina prípustných riešení vytvára konvexný polyéder so štyrmi krajnými bodmi.
2. Za účelom nájdania optimálneho riešenia zobrazíme najprv gradient účelovej funkcie, ktorý má súradnice $\nabla f = (20, 30)$ a prechádza cez počiatok súradníc a potom priamku, kolmú na gradient, t.j. smernicu účelovej funkcie, ktorá je na obr.2.1 znázornená hrubšou prerušovanou priamkou. S touto priamkou kreslíme rovnobežky v smere gradientu dovtedy, kým nakreslíme opornú priamku k množine prípustných riešení. Na obr. 2.1 je to prerušovaná čiara, ktorá prechádza jediným krajným bodom množiny prípustných riešení $P[70,15]$. Súradnice uvedeného bodu $x_1 = 70$, $x_2 = 15$ sú optimálnym riešením úlohy. Maximálna hodnota účelovej funkcie je $f = 1850$. Ľahko sa možno presvedčiť, že v každom inom bode množiny prípustných riešení nadobúda účelová funkcia menšiu hodnotu ako 1850. **Úloha má jediné konečné optimálne riešenie.**

Grafické riešenie úlohy z príkladu 2.9.



Obr. 2.1

Príklad 2.10

Pre nasledovnú úlohu LP nájdime grafickou metódou optimálne riešenie.

Účelová funkcia:

$$f = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \text{maximum} \quad (1)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$20x_1 + 40x_2 \leq 2000 \quad (2)$$

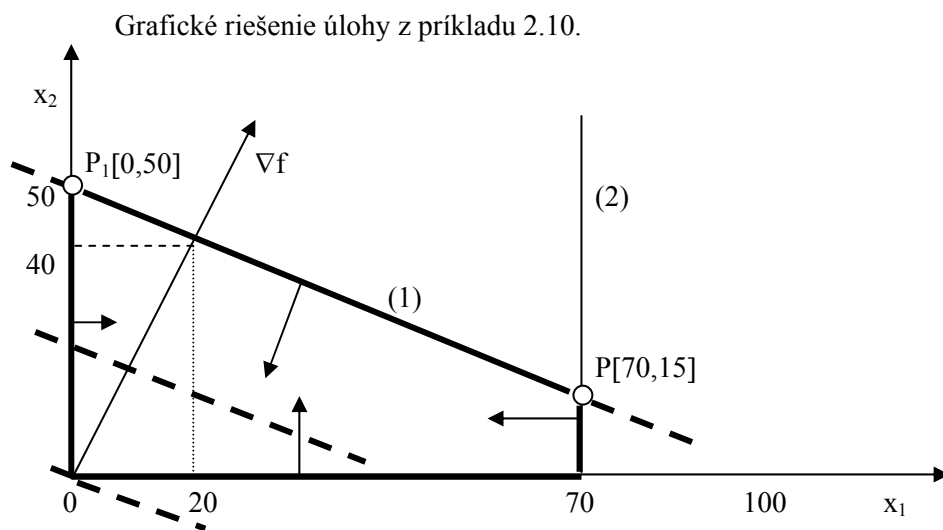
$$x_1 \leq 70 \quad (3)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

Riešenie:

Grafické riešenie úlohy je zrejmé z obr. 2.2. Množina prípustných riešení je ohraničená hrubšími neprerušovanými čiarami a tvorí konvexný polyéder. Gradient účelovej funkcie prechádza cez bod $[20, 40]$ a počiatok súradníc. Rovnobežka so smernicou účelovej funkcie je v polohe opornej priamky oproti množine prípustných riešení na úsečke ohraničenej krajnými bodmi $P_1[0, 50]$, $P_2[70, 15]$. **Úloha v tomto prípade má nekonečne veľa konečných optimálnych riešení.** Vyjadríme ich ako lineárnu konvexnú kombináciu uvedených krajných bodov, t.j. $(x_1, x_2) = c_1[0, 50] + c_2[70, 15]$, kde $c_1 + c_2 = 1$ a $c_1, c_2 \in [0, 1]$.



Obr. 2.2.

Príklad 2.11.

Pre nasledovnú úlohu LP nájdime grafickou metódou optimálne riešenie.

Účelová funkcia:

$$f = x_1 + x_2 \rightarrow \text{maximum} \quad (1)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$x_1 + 2x_2 \geq 4 \quad (2)$$

$$2x_1 - x_2 \geq 2 \quad (3)$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 2 \quad (4)$$

Podmienky nezápornosti:

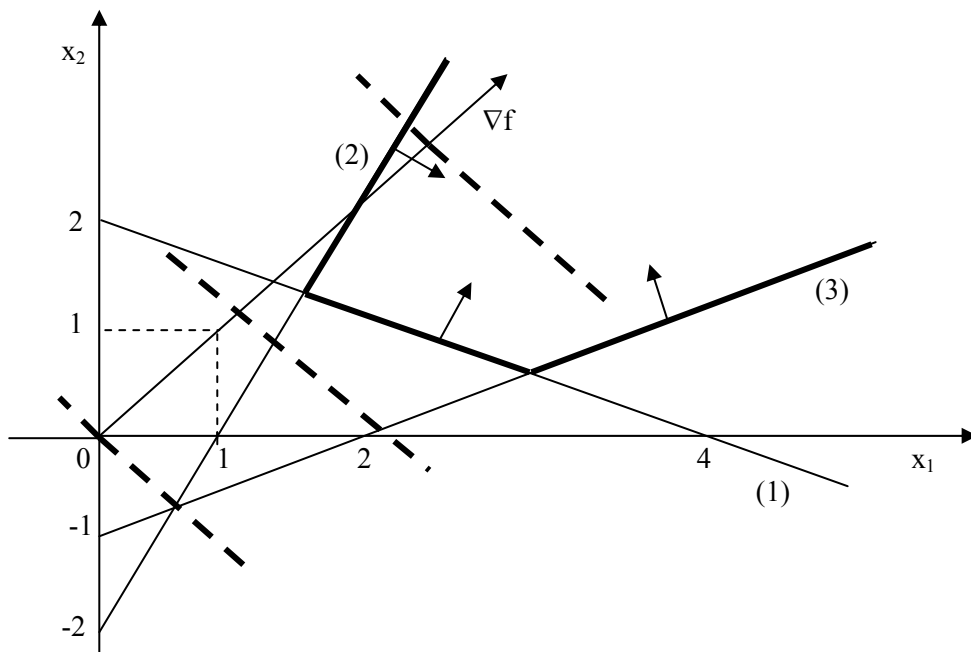
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

Riešenie:

Grafické riešenie úlohy je znázornené na obr.2.3. Deliace priamky sú očíslované v súlade s očíslovaním odpovedajúcich nerovníc. Množina prípustných riešení je vyznačená hrubšími neprerušovanými čiarami a je to neohraničená konvexná množina s dvoma krajnými bodmi.

Smernica účelovej funkcie kolmá na gradient funkcie f (vzťah (1)) je znázornená na obr.2.3 hrubšou prerušovanou čiarou. Z uvedeného obrázku je zrejmé, že účelová funkcia by nadobudla na množine prípustných riešení maximum vtedy, keby jej smernica mohla byť opornou priamkou oproti množine prípustných riešení zhora (v smere rastu gradienta). To je však nemožné, pretože množina prípustných riešení je na tejto strane neohraničená, čiže účelová funkcia nemôže nadobudnúť maximum na množine prípustných riešení. V tomto prípade **má úloha nekonečne veľá prípustných riešení, ale nemá riešenie optimálne**.

Grafické riešenie úlohy z príkladu 2.11.



Obr. 2.3.

Príklad 2.12.

Pre nasledovnú úlohu LP nájdime grafickou metódou optimálne riešenie.

Účelová funkcia:

$$f = 2x_1 + x_2 \rightarrow \text{maximum} \quad (1)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (2)$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12 \quad (3)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (4)$$

Riešenie:

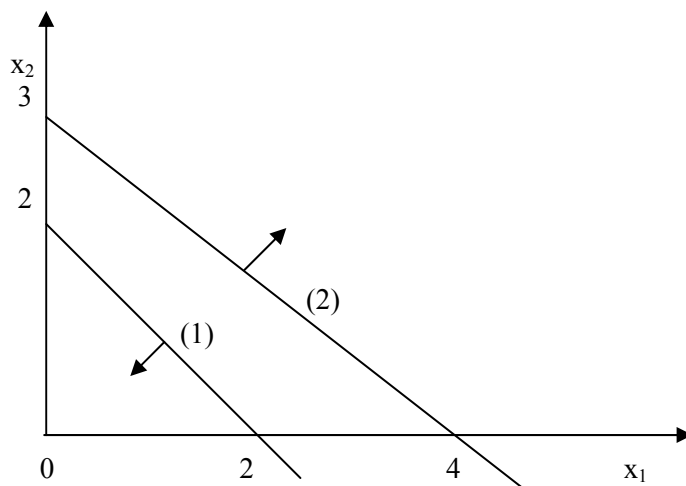
Z grafického zobrazenia množiny prípustných riešení na obr.2.4. vidíme, že poloroviny, ktoré sú riešeniami nerovníc (2), (3) sú navzájom nekonzistentné (sporné) a množina prípustných riešení je prázdna množina. Čiže **úloha nemá prípustné a teda ani optimálne riešenie**.

Záverom možno zhrnúť, že pri riešení úloh LP nastane vždy jeden z uvedených výsledkov:

1. **Úloha LP má jediné konečné optimálne riešenie.** Množina prípustných riešení je ohraničená konvexná množina a účelová funkcia nadobúda požadovaný extrém iba v jednom jej krajnom bode.

2. **Úloha LP má nekonečne veľa konečných optimálnych riešení.** Množina prípustných riešení je ohraničená konvexná množina a účelová funkcia nadobúda požadovaný extrém aspoň v dvoch jej krajných bodoch a vo všetkých ostatných bodoch, ktoré sú lineárnou konvexnou kombináciou týchto krajných bodov.
3. **Úloha LP má prípustné riešenia, ale nemá konečné optimálne riešenie.** Množina prípustných riešení je neohraničená konvexná množina a účelová funkcia nenadobudne na množine prípustných riešení konečnú hodnotu.
4. **Úloha LP nemá prípustné riešenie a teda ani optimálne riešenie.** Množina prípustných riešení je prázdna množina.

Grafické riešenie úlohy z príkladu 2.12.



Obr. 2.4.

2.3.2 Bázické riešenie úlohy LP

Riešenie $\vec{x} = (x_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ úlohy (2.13)-(2.15) nazveme **bázické**, ak riešenie sústavy rovníc (2.14) je bázické, t.j. ak vektory $\vec{a}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ zodpovedajúce súradniciam vektora $\vec{x}$ tvoria lineárne nezávislú sústavu.

Predpokladajme, že EMM úlohy LP je vyjadrený v štandardnom tvare vzťahmi (2.13)-(2.15). Sústava vlastných obmedzujúcich podmienok (2.14) vo vektorovom tvare je nasledovná:

$$\vec{a}_1 x_1 + \vec{a}_2 x_2 + \dots + \vec{a}_n x_n = \vec{b} \quad (2.20)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Predpokladajme, že v sústave (2.20) je m vektorov $\vec{a}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ lineárne nezávislých. Sústavu (2.20) usporiadajme tak, aby vybrané vektory boli na prvých m miestach. Potom existuje práve jedno bázické riešenie sústavy (2.20), ktoré získame tak, že vektory $\vec{a}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ pri bázických premenných $x_1, x_2, \dots, x_m$ transformujeme na jednotkové vektory $\vec{e}_j$,

$j = 1, 2, \dots, m$. Súčasne sa vektory $\vec{a}_j$, $j = m+1, m+2, \dots, n$ pri nebázických premenných $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ transformujú na vektory $\vec{\alpha}_j$, $j = m+1, m+2, \dots, n$. Vektor $\vec{b}$ sa transformuje na vektor $\vec{\beta}$, t.j.

$$\begin{matrix} \vec{\alpha}_1 & \vec{\alpha}_2 & & \vec{\alpha}_m & \vec{\alpha}_{m+1} & & \vec{\alpha}_n & \vec{\beta} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_m + \begin{pmatrix} \alpha_{1m+1} \\ \alpha_{2m+1} \\ \vdots \\ \alpha_{mm+1} \end{pmatrix} x_{m+1} + \dots + \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.21)$$

Ak v sústave (2.21) položíme za nebázické premenné nuly, získame nasledovné bážické riešenie úlohy LP:

$$x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_m = \beta_m.$$

Čiže bážické riešenie úlohy LP vyjadrenej v štandardnom tvare vzťahmi (2.13)-(2.15) možno vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$\begin{matrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & & \vec{a}_m & \vec{b} \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \beta_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \beta_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{mm} \end{pmatrix} \beta_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.22)$$

Z teórie riešenia sústav lineárnych rovníc je známe, že riešenie, ktoré má najviac m zložiek rôznych od nuly a ostatné zložky sú nulové, je riešenie bážické. Čiže bážické riešenie príslušnej úlohy LP získame aj tak, že sústavu obmedzujúcich podmienok (2.14) za predpokladu, že hodnosť matice sústavy je rovná m (počtu riadkov matice sústavy), transformujeme pri bážických premenných $x_1, x_2, \dots, x_m$ na kánonický tvar (2.17) a nebázické premenné $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ položíme rovné nule.

Ak hodnoty bážického riešenia spĺňajú podmienky nezápornosti (2.15) t.j. ak $\beta_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ ide o **bážické prípustné riešenie**. Ostatné bážické riešenia, t.j. tie, ktoré nespĺňajú podmienky nezápornosti, sú **nepřípustné bážické riešenia**.

Geometrickou interpretáciou riešenia úloh LP sme sa presvedčili o skutočnosti, že **ak existuje optimálne riešenie úlohy LP, leží v krajnom bode množiny prípustných riešení danej úlohy**. V teórii LP sa tiež dokazuje, že **riešenie ktoré sa nachádza sa v krajnom bode množiny prípustných riešení, je riešením bážickým (základným)**.

Optimálne riešenie je teda bážické prípustné riešenie.

Vektory $\vec{a}_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ tvoriace lineárne nezávislú sústavu a odpovedajúce súradniciam príslušného riešenia tvoria tzv. **bázu príslúchajúcu k danému riešeniu**. Matica, ktorá pozostáva z vektorov tvoriacich bázu, sa nazýva **matice bázy**. Označme ju B . Odpovedajúce bážické riešenie označme vektorom $\vec{x}_B$, čiže $\vec{x}_B^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$. Čísla β_i , $i = 1, 2, \dots, m$ sú

súradnice vektora $\vec{\beta}$ odpovedajúce príslušnej báze s maticou bázy B . Vektor $\vec{x}_B^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$ je vektor celkového bázičského riešenia.

Bázu odpovedajúcu optimálnemu riešeniu nazvime **optimálna báza**. Označme maticu odpovedajúcu optimálnej báze B_0 a nazveme ju **maticou optimálnej bázy**. Odpovedajúce optimálne riešenie označme $\vec{x}_{B_0}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$. Vektor celkového bázičského optimálneho riešenia $\vec{x}_{B_0}^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, \dots, 0)$.

Keďže sústava (2.14) má n premenných a m rovníc, pričom $n \geq m$, je zrejmé, že počet lineárne nezávislých vektorov (kladných zložiek v bázičskom prípustnom riešení) nemôže byť väčší ako m . Bázičské prípustné riešenie budeme nazývať **nedegenerovaným riešením**, ak obsahuje práve m kladných zložiek. Bázičské prípustné riešenie budeme nazývať **degenerovaným riešením**, ak obsahuje menej ako m kladných zložiek, t.j. viac než $n-m$ nulových zložiek.

Pre úlohy LP platí nasledovná veta :

Ak úloha LP má optimálne bázičské prípustné riešenie, potom má aj bázičské prípustné riešenie.

Pri hľadaní optimálneho riešenia sa stačí teda obmedziť iba na množinu bázičských prípustných riešení. Bázičské prípustné riešenie (riešenia), v ktorom účelová funkcia nadobúda požadovaný extrém, je riešenie (riešenia) optimálne.

Príklad 2.13.

Pre úlohu LP v príklade 2.2 vyjadrenú v štandardnom tvare (príklad 2.8) vypočítajme všetky bázičské riešenia a preverme ich prípustnosť. Stanovme pre uvedenú úlohu optimálne riešenie. Úloha vyjadrená v štandardnom tvare je uvedená v príklade 2.8 a je nasledovná:

Účelová funkcia:

$$f = 21,3125x_1 + 25,4065x_2 + 0d_1 + 0d_2 \rightarrow \text{maximum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & x_2 & & & = 7 \\ 5,5x_1 + & 6,1x_2 & - d_1 & & = 40 \\ 9,7x_1 + & 13,04x_2 & & + d_2 & = 130 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0.$$

Riešenie:

Vyjadríme sústavu obmedzujúcich podmienok podľa vzťahu (2.20), t.j.

$$\begin{array}{ccccc} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 & \vec{b} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \\ 9,7 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 6,1 \\ 13,04 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} d_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 40 \\ 130 \end{pmatrix} \end{array}$$

Bázičské riešenia získame tak, že pre každú trojicu lineárne nezávislých vektorov $\vec{a}_j$, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ transformujeme odpovedajúce vektory na jednotkové. Napr. pri trojici nezávislých vektorov $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ transformujeme sústavu na nasledovný tvar:

$$\vec{\alpha}_1 \quad \vec{\alpha}_2 \quad \vec{\alpha}_3 \quad \vec{\alpha}_4 \quad \vec{\beta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d_1 + \begin{pmatrix} -0,299 \\ 0,299 \\ 0,180 \end{pmatrix} d_2 = \begin{pmatrix} -11,593 \\ 18,593 \\ 9,656 \end{pmatrix},$$

odkiaľ je zrejmé, že odpovedajúce bázické riešenie úlohy je nasledovné: $x_1 = -11,593$; $x_2 = 18,593$; $d_1 = 9,656$.

Analogickým postupom získame bázické riešenia odpovedajúce ostatným trojiciam lineárne nezávislých vektorov.

Bázické riešenia úlohy získame i tak, že pre každú trojicu bázických premenných (sústava obmedzujúcich podmienok vyjadrená v štandardnom tvare má hodnotu $m = 3$) upravíme sústavu do kánonického tvaru, pričom za zvyšnú nebázickú premennú dosadíme nulu. Kánonický tvar sústavy obmedzujúcich podmienok napr. pri bázických premenných x_1, x_2, d_1 je nasledovný:

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 & & -0,299d_2 = -11,593 \\ & 1x_2 & +0,299d_2 = 18,593 \\ & & 1d_1 & +0,180d_2 = 9,656 \end{array}$$

Ak v uvedenej sústave položíme premennú $d_2 = 0$, dospejeme k rovnakému bázickému riešeniu, ktoré je uvedené vyššie v texte.

Opäť analogickým postupom získame aj ostatné bázické riešenia úlohy, ktoré sú uvedené v tabuľke 2.6.

Dosadzovaním bázických prípustných riešení úlohy z tabuľky 2.6 do účelovej funkcie zistíme, že maximálnu hodnotu t. j. 177,8455 nadobúda pri premenných $x_1=0, x_2=7, d_1=2,7, d_2=38,72$. Uvedené riešenie je optimálnym riešením príslušnej úlohy LP.

Celkové bázické riešenia úlohy LP z príkladu 2.13.

Tab. 2.6

Bázické premenné	Nebázická premenná	Celkové bázické riešenie	Hodnotenie prípustnosti
x_1, x_2, d_1	d_2	$x_1=-11,593, x_2=18,593, d_1=9,656, d_2=0$	neprípustné
x_1, x_2, d_2	d_1	$x_1=4,5, x_2=2,5, d_1=0, d_2=53,75$	prípustné
x_1, d_1, d_2	x_2	$x_1=7, x_2=0, d_1=-1,5, d_2=62,1$	neprípustné
x_2, d_1, d_2	x_1	$x_1=0, x_2=7, d_1=2,7, d_2=38,72$	prípustné

V praktických úlohách, v ktorých je spravidla veľký počet premenných a podmienok, uvedený postup hľadania optimálneho riešenia nie je vhodné aplikovať. Počet bázických riešení sústavy (2.14) je síce konečný a ich maximálny počet je daný číslom $\binom{n}{m}$, avšak pri riešení praktických úloh nie je možné vypočítavať všetky bázické riešenia a prípustné bázické riešenia dosadzovať do účelovej funkcie, pretože ich počet býva spravidla veľmi veľký (napr ak $n = 20$ a $m = 10$ je $\binom{n}{m} = 184756$).

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

1. Určenie bázičného prípustného riešenia

Predpokladajme, že v úlohe LP v štandardnom tvare sú hodnoty $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$, sústava rovníc (2.24) je lineárne nezávislá a počet neznámych je väčší ako počet rovníc, t. j. $n > m$. Ďalej predpokladajme, že v sústave (2.24) je m vektorov $\vec{a}_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ pri neznámych $x_k, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ lineárne nezávislých. Zvoľme uvedené premenné za bázičné a transformujme EMM v štandardnom tvare na úplný kánonický tvar, pričom ho usporiadajme tak, aby vybrané vektory a odpovedajúce bázičné premenné boli na prvých m miestach s indexmi $j = 1, 2, \dots, m$:

Účelová funkcia:

$$f + 0x_1 + 0x_2 \dots 0x_m \quad \gamma_{m+1}x_{m+1} + \dots + \gamma_k x_k + \dots + \gamma_n x_n = \beta_0 \quad (2.26)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{aligned} 1x_1 + & \alpha_{1m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{1k}x_k + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ 1x_2 + & \alpha_{2m+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{2k}x_k + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\dots \dots \dots 1x_m + \alpha_{mm+1}x_{m+1} + \dots + \alpha_{mk}x_k + \dots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

Za predpokladu, že $\beta_i \geq 0$, pre $i = 1, 2, \dots, m$ pri nulovej voľbe nebázičných premenných, t.j.

$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots x_n = 0$, získame celkové bázičné prípustné riešenie danej úlohy s maticou bázy B , ktoré má nasledovný tvar:

$$\vec{x}_B^T = (x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, \dots, x_m = \beta_m, x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots, x_n = 0). \quad (2.29)$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_B) = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_m\beta_m = \beta_0. \quad (2.30)$$

2. Test optimálnosti

Bázičné prípustné riešenie je vtedy riešením optimálnym, ak neexistuje žiadne iné bázičné prípustné riešenie, pri ktorom by sa mohla hodnota účelovej funkcie zlepšiť. V ďalšom teda treba zistiť, či možno prechodom k inému bázičnému prípustnému riešeniu úlohy (k inej báze) zlepšiť hodnotu účelovej funkcie. Za tým účelom vyjadrieme účelovú funkciu (2.26) nasledovným spôsobom:

$$f = \beta_0 - \gamma_{m+1}x_{m+1} - \gamma_{m+2}x_{m+2} - \dots - \gamma_k x_k - \dots - \gamma_n x_n. \quad (2.31)$$

Predpokladajme, že zaradovanou premennou do bázičného riešenia bude nebázičná premenná $x_k, k \notin B$ (do bázy bude zaradený nebázičný vektor $\vec{a}_k$ odpovedajúci premennej x_k), ktorá nadobudne hodnotu p , čiže $x_k = p > 0$. Potom nové celkové bázičné riešenie s novou bázou bude mať nasledovný tvar:

$$\vec{x}_B^T = (x_1 = \beta_1 - \alpha_{1k}p, \dots, x_m = \beta_m - \alpha_{mk}p, x_{m+1} = 0, \dots, x_k = p, \dots, x_n = 0) \quad (2.32)$$

s nasledovnou hodnotou účelovej funkcie:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_B) &= c_1(\beta_1 - \alpha_{1k}p) + c_2(\beta_2 - \alpha_{2k}p) + \dots + c_k p + \dots + c_m(\beta_m - \alpha_{mk}p) = \\ &= c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_m\beta_m - p(c_1\alpha_{1k} + c_2\alpha_{2k} + \dots + c_m\alpha_{mk} - c_k). \end{aligned}$$

Vzhľadom k vzťahu (2.30) možno uvedenú funkciu vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$f(\bar{x}_B) = \beta_0 - p(c_1\alpha_{1k} + c_2\alpha_{2k} + \dots + c_m\alpha_{mk} - c_k).$$

Výraz v zátvorke je skalárny súčin vektora ocenení báziických premenných a vektora transformovaných koeficientov pri premennej x_k . Ak uvedený súčin označíme symbolom z_k , hodnota účelovej funkcie nového báziického riešenia bude nasledovná:

$$f(\bar{x}_B) = \beta_0 - p(z_k - c_k). \quad (2.33)$$

Zo vzťahu (2.33) je zrejmé, že zaradením premennej $x_k = p > 0$ do riešenia sa hodnota účelovej funkcie neznižuje iba vtedy, ak bude výraz v zátvorke $z_k - c_k \leq 0$ a nezvýši iba vtedy, ak bude výraz v zátvorke $z_k - c_k \geq 0$.

Treba si uvedomiť, že rozdiely $z_j - c_j$, $j = m+1, m+2, \dots, n$ sú vlastne transformované koeficienty účelovej funkcie $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \dots, \gamma_n$ pri nebáziických premenných $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$. Uvedené rozdiely majú pri báziických premenných $x_1, x_2, \dots, x_m$ samozrejme nulové hodnoty. Na základe uvedených skutočností sformulujeme **test optimálnosti**:

- Ak v maximalizačnej úlohe LP pre určité báziické prípustné riešenie pre všetky indexné čísla platí: $z_j - c_j \geq 0$; $j = 1, 2, \dots, n$, potom je uvedené riešenie optimálnym riešením úlohy LP.
- Ak v minimalizačnej úlohe LP pre určité báziické prípustné riešenie pre všetky indexné čísla platí: $z_j - c_j \leq 0$; $j = 1, 2, \dots, n$, potom je riešenie optimálnym riešením úlohy LP.

Vychádzajúc z predchádzajúcich úvah možno pre výpočet indexných čísel využiť nasledovný vzťah:

$$z_j - c_j = c_1\alpha_{1j} + c_2\alpha_{2j} + \dots + c_m\alpha_{mj} - c_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

Koeficienty γ_j , resp. rozdiely $z_j - c_j$ budeme ďalej nazývať **indexné čísla**.

3. Prechod k novému báziickému prípustnému riešeniu (k novej báze)

Ak sme testom optimálnosti zistili, že príslušné báziické prípustné riešenie nie je optimálne, prejdeme na iné báziické prípustné riešenie, v ktorom sa nahradí jedna pôvodne báziická premenná jednou pôvodne nebáziickou premennou. Nové báziické prípustné riešenie, ktoré nezhorší hodnotu účelovej funkcie získame nasledovným postupom:

3.1 Výber premennej vstupujúcej do báziického riešenia

V maximalizačnej úlohe LP je účelné zaradiť medzi báziické premenné v podstate ľubovoľnú nebáziickú premennú x_k , $k \notin B$, ktorej indexné číslo v účelovej funkcii $z_k - c_k < 0$. Naopak v minimalizačnej úlohe LP je účelné zaradiť medzi báziické premenné v podstate ľubovoľnú nebáziickú premennú x_k , $k \notin B$, ktorej indexné číslo v účelovej funkcii $z_k - c_k > 0$.

V snahe zníženia počtu báziických riešení premennú vstupujúcu do bázy vyberme nasledovným spôsobom:

Premennou vstupujúcou do bázičkého riešenia v maximalizačnej úlohe bude tá nebázičká premenná, ktorá má v účelovej funkcii minimálne záporné indexné číslo.

Premennou vstupujúcou do bázičkého riešenia v minimalizačnej úlohe bude tá nebázičká premenná, ktorá má v účelovej funkcii maximálne kladné indexné číslo.

3.2 Výber premennej vystupujúcej z bázičkého riešenia

Predpokladajme, že premennou vstupujúcou do bázičkého riešenia bude premenná x_k , $k \notin B$, ktorá nadobudne hodnotu p , čiže $x_k = p > 0$. Potom prípustnosť nového bázičkého riešenia vyžaduje na základe vzťahu (2.32) platnosť nasledovných vzťahov:

$$\begin{aligned}x_1 &= \beta_1 - \alpha_{1k} p \geq 0 \\x_2 &= \beta_2 - \alpha_{2k} p \geq 0 \\&\vdots \\x_m &= \beta_m - \alpha_{mk} p \geq 0\end{aligned}$$

Z uvedených vzťahov pre hodnotu $p > 0$ platí:

$$p \leq \min_{\alpha_{ik} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.35)$$

Vzťah (2.35) sa nazýva **podmienkou prípustnosti**. Táto je podmienkou prechodu od jedného prípustného riešenia k ďalšiemu prípustnému riešeniu.

Predpokladajme, že $\min_{\alpha_{ik} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} = \frac{\beta_t}{\alpha_{tk}}$, potom ak $x_k = p = \frac{\beta_t}{\alpha_{tk}}$, premenná x_t

nadobudne nulovú hodnotu a stane sa nebázičkou a nahradí ju premenná x_k . **Premennú x_t nazveme premennou vystupujúcou z bázičkého riešenia.** Tým sa dosiahne, že nové riešenie zostane bázičné.

3.3 Výpočet nového prípustného bázičkého riešenia

V skutočnosti sa uvedeným postupom prechádza z pôvodnej bázy na inú bázu, v ktorej bude jeden z pôvodných bázičkových vektorov nahradený jedným pôvodne nebázičkým vektorom. Odpovedajúce nové prípustné bázičné riešenie pri novej kombinácii bázičkových premenných získame opäť transformáciou sústavy (2.24) na kánonický tvar napr. aplikáciou Gaussovej-Jordanovej eliminačnej metódy. Indexné čísla odpovedajúce novému bázičnému riešeniu sa pretransformujú ako rozdiely $z_j - c_j$ podľa vzťahu (2.34). Hodnotu účelovej funkcie, ktorá zodpovedá novému bázičnému riešeniu možno na základe vzťahu (2.33) vyjadriť vzťahom:

$$f = \beta_0 - (z_k - c_k) \cdot \frac{\beta_t}{\alpha_{tk}}.$$

Po transformácii znovu vykonáme test optimálnosti nového bázičkého prípustného riešenia. Ak toto riešenie nie je ešte optimálne, prejdeme k ďalšiemu bázičnému prípustnému riešeniu (k ďalšej báze).

Po konečnom počte iterácií (krokov) nastane jedna z nasledovných možností:

- Získané riešenie je optimálne a všetky indexné čísla odpovedajúce nebázičkým premenným sú pri maximalizácii účelovej funkcie kladné a pri minimalizácii účelovej funkcie záporné. Optimálne riešenie je jediné.

- b) Získané riešenie je optimálne a aspoň jedno indexné číslo odpovedajúce nebázickým premenným má hodnotu rovnú nule. Potom zaradením premennej s indexným číslom rovným nule do riešenia sa získa alternatívne optimálne riešenie. Vtedy má úloha nekonečne veľa konečných optimálnych riešení.
- c) Získané riešenie nie je optimálne, ale všetky koeficienty $\alpha_{ik} \leq 0$. Vtedy premenná x_k nie je ohraničená a hodnota účelovej funkcie môže neobmedzene rásť alebo klesať. Vtedy úloha nemá konečné optimálne riešenie.

Za účelom overenia uvedených tvrdení odporúčame čitateľovi po naštudovaní častí 2.5.2 a 2.5.3 prepočítať simplexovou metódou príklady 2.9 – 2.12.

2.4.2 Konštrukcia východiskového bázičného prípustného riešenia

Pri teoretickom odvodzovaní prvého (východiskového) bázičného prípustného riešenia sme predpokladali, že sústava obmedzujúcich podmienok v EMM je vyjadrená v štandardnom tvare a pri zvolených bázičkých premenných sme ju upravili na kánonický tvar. V tejto časti budeme venovať pozornosť konštrukcii východiskového bázičného prípustného riešenia za predpokladu, že EMM je vo všeobecnom tvare, čiže obmedzujúce podmienky sú formulované okrem rovníc i ako nerovnice s horným, resp. s dolným ohraničením.

- Najskôr uvažujme, že v EMM sú všetky obmedzujúce podmienky formulované ako nerovnice typu $\leq$. Čiže ide o nasledovnú úlohu:

Účelová funkcia:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{maximum} \quad (2.36)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.37)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.38)$$

Uvedenú úlohu prepíšeme do štandardného tvaru pomocou nezáporných doplnkových premenných $d_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, ktoré k ľavej strane nerovníc pripočítame a ktorým do účelovej funkcie priradíme koeficienty $c_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ (pozri časť 2.2.2). EMM v štandardnom tvare obsahuje sústavu m rovníc s $m+n$ premennými a môžeme ho zapísať nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^m 0d_i \rightarrow \text{maximum} \quad (2.39)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i = b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.40)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j, d_i \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.41)$$

Vidíme, že obmedzujúce podmienky v EMM vyjadrené vzťahom (2.40) sú v kánonickom tvare pri doplnkových premenných d_i , $i = 1, 2, \dots, m$, pričom stĺpcové jednotkové vektory, ktoré im odpovedajú, sú lineárne nezávislé a teda môžu tvoriť východiskovú bázu s maticou bázy B_0 .

Čiže celkové východiskové bázičné prípustné riešenie pre úlohu (2.39)–(2.41) možno zapísať takto:

$$\vec{x}_{B_0}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, d_1 = b_1, d_2 = b_2, \dots, d_m = b_m). \quad (2.42)$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_0}) = 0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n + 0b_1 + 0b_2 + \dots + 0b_m = 0. \quad (2.43)$$

Príklad 2.14.

Uvažujme EMM úlohy obsiahnutej v príklade 2.1 (časť 2.1), ktorý je sformulovaný nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia: $f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 10x_4 \rightarrow \text{maximum}$

Obmedzujúce podmienky:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 300$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 200$$

Podmienky nezápornosti: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Úlohou je za účelom riešenia úlohy simplexovou metódou stanoviť východiskové bázičné prípustné riešenie.

Riešenie:

Pripočítaním nezáporných doplnkových premenných do obmedzujúcich podmienok upravíme uvedený EMM do štandardného tvaru. Doplnkovým premenným dáme do účelovej funkcie nulové ocenenia. EMM v štandardnom tvare je nasledovný:

Účelová funkcia: $f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 0d_1 + 0d_2 \rightarrow \text{maximum}$.

Obmedzujúce podmienky:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + d_1 = 300$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 + d_2 = 200$$

Podmienky nezápornosti: $x_1, x_2, x_3, x_4, d_1, d_2 \geq 0$.

Po nulovaní účelovej funkcie vidíme, že EMM je v úplnom kánonickom tvare. Jednotkové vektory $\vec{a}_5, \vec{a}_6$ prislúchajúce doplnkovým premenným d_1, d_2 sú lineárne nezávislé (ide o

tzv. prirodzenú nezávislosť) a vytvárajú východiskovú bázu s maticou bázy $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Celkové východiskové bázičné prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_0}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, d_1 = 300, d_2 = 200).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_0}) = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 200 = 0.$$

- Uvažujme ďalej úlohu LP so zmiešaným typom ohraňení, ktorú možno formulovať nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.44)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i \in M_1 \quad (2.45)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i \in M_2 \quad (2.46)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in M_3 \quad (2.47)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.48)$$

kde M_1, M_2, M_3 sú množiny indexov i priradených k podmienkam s ohraňeniami typu $\leq, \geq, =$.

Uvedená úloha vyjadrená v štandardnom tvare je nasledovná:

Účelová funkcia:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i \in M_1 \cup M_2} 0 d_i \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.49)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i = b_i, i \in M_1 \quad (2.50)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - d_i = b_i, i \in M_2 \quad (2.51)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i \in M_3 \quad (2.52)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, d_i \geq 0, i \in M_1 \cup M_2 \quad (2.53)$$

EMM úlohy v štandardnom tvare (vzťahy (2.49)–(2.53)) nie je všeobecne v kánonickom tvare. **Kánonický tvar uvedeného modelu vytvoríme „umelým spôsobom“ tak, že na ľavé strany obmedzujúcich podmienok, v ktorých nie sú priradené doplnkové premenné, priradíme nezáporné tzv. umelé (pomocné) premenné, ktoré označíme $u_i, i \in M_1 \cup M_2$.**

Zavedením umelých premenných získame rozšírenú úlohu, ktorá však nie je ekvivalentná s pôvodnou úlohou. Ekvivalencia medzi rozšírenou a pôvodnou úlohou nastane až vtedy, ak sa získa riešenie, v ktorom budú mať umelé premenné nulové hodnoty, t. j. budú nezápornými premennými. Z tohto dôvodu sa priraduje umelým premenným veľmi nepriaznivé, tzv. prohibítívne ocenenie, ktoré označíme M . Prohibítívne ocenenie M volíme tak, aby bolo vzhľadom na ocenenia ostatných premenných veľmi nevýhodné. To znamená, že ak ide o maximalizačnú úlohu, za M položíme veľmi malé záporné číslo a naopak, ak má úloha minimalizačný charakter, za M položíme veľmi veľké kladné číslo.

Rozšírený EMM pôvodnej úlohy (vzťahy (2.49) – (2.53)) má nasledovný tvar:

Účelová funkcia:

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i \in M_1 \cup M_2} 0d_i + \sum_{i \in M_2 \cup M_3} M u_i \rightarrow \text{maximum (minimum)} \quad (2.54)$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + d_i = b_i, i \in M_1 \quad (2.55)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - d_i + u_i = b_i, i \in M_2 \quad (2.56)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + u_i = b_i, i \in M_3 \quad (2.57)$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n, d_i \geq 0, i \in M_1 \cup M_2, u_i \geq 0, i \in M_2 \cup M_3 \quad (2.58)$$

V EMM vyjadrenom vzťahmi (2.54)–(2.58) je sústava obmedzujúcich podmienok v kánonickom tvare pri doplnkových premenných $d_i, i \in M_1$ a pri umelých premenných $u_i, i \in M_2 \cup M_3$, pričom stĺpcové jednotkové vektory, ktoré im odpovedajú, sú lineárne nezávislé a teda môžu tvoriť východiskovú bázu. Východiskovú bázu vytvorenú pomocou umelých premenných nazveme **umelou východiskovou bázou**.

Čiže celkové východiskové bázičné prípustné riešenie pre úlohu (2.54)–(2.58) možno vytvoriť takto:

$$\bar{x}_{B_0}^T = (x_j = 0, j = 1, 2, \dots, n, d_i = b_i, i \in M_1, d_i = 0, i \in M_2, u_i = b_i, i \in M_2 \cup M_3) \quad (2.59)$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\bar{x}_{B_0}) = \sum_{j=1}^n 0x_j + \sum_{i \in M_1 \cup M_2} 0b_i + \sum_{i \in M_2 \cup M_3} M b_i = \sum_{i \in M_2 \cup M_3} M b_i \quad (2.60)$$

Príklad 2.15.

Uvažujme EMM úlohy obsiahnutej v príklade 2.2 (časť 2.1), ktorý je upravený na štandardný tvar v príklade 2.8 nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = 21,3125x_1 + 25,4065x_2 + 0d_1 + 0d_2 \rightarrow \text{maximum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + x_2 & & & & = 7 \\ 5,5x_1 + 6,1x_2 & - d_1 & & & = 40 \\ 9,7x_1 + 13,04x_2 & & + d_2 & & = 130 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0.$$

Úlohou je skonštruovať východiskové bázičné prípustné riešenie za účelom riešenia úlohy simplexovou metódou.

Riešenie:

EMM úlohy vyjadrený v štandardnom tvare rozšírime o umelé premenné, ktoré pripočítame k prvej a k druhej rovnici, čím získame obmedzujúce podmienky úlohy v kánonickom tvare. Umelým premenným priradíme do účelovej funkcie prohibívne ocenenie

M, (hodnotu M položíme rovnú napr. -1000). Úloha po transformácii na kánonický tvar je nasledovná:

Účelová funkcia:

$$f = 21,3125x_1 + 25,4065x_2 + 0d_1 + 0d_2 - 1000u_1 - 1000u_2 \rightarrow \text{maximum}$$

OBMEDZUJÚCE PODMIENKY:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & + & x_2 & & & + u_1 & = & 7 \\ 5,5x_1 & + & 6,1x_2 & - & d_1 & & + u_2 & = & 40 \\ 9,7x_1 & + & 13,04x_2 & & + d_2 & & & = & 130 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2, u_1, u_2 \geq 0.$$

Východiskovú bázu tvoria jednotkové vektory $\vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6$ priradené k bázičným premenným d_2 ,

$$u_1, u_2, \text{ s maticou } B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Celkové východiskové bázičné prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_0}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, d_1 = 0, d_2 = 130, u_1 = 7, u_2 = 40).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_0}) = 21,3125 \cdot 0 + 25,4065 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 130 - 1000 \cdot 7 - 1000 \cdot 40 = -47000.$$

2.4.3 Aplikácia simplexovej metódy v simplexovej tabuľke

Realizácia simplexovej metódy pri riešení úloh LP vyžaduje dať celému výpočtovému procesu vhodnú formu a stanoviť preň mechanické pravidlá. V tomto zmysle sa osvedčila technika využitia špeciálne upravenej tabuľky, pre ktorú sa zaužíval názov „simplexová tabuľka“.

Ako sme už konštatovali, podstatou iteratívneho vyhľadávania optimálneho riešenia je prechod z jedného kánonického tvaru sústavy rovníc na iný kánonický tvar. Pri zmene kánonického tvaru dochádza ku zmene bázy. V každej iterácii sa vymieňa iba jeden vektor bázy tak, že jeden vektor vstupuje do bázy a jeden z nej vystupuje (jedna premenná vstupuje do riešenia a stáva sa bázičnou a jedna premenná vystupuje z riešenia a stáva sa nebázičnou). Uvedenou elementárnou zmenou bázy sa v každej iterácii získava nové bázičné prípustné riešenie s „lepšou“ hodnotou účelovej funkcie. Každé bázičné riešenie v iteračnom postupe uvedieme v samostatnej simplexovej tabuľke.

Priradíme iteráciám index h , $h = 0, 1, 2, \dots, o$. Čiže východiskovému riešeniu (východiskovej iterácii) priradíme index $h = 0$, optimálnemu riešeniu (ak existuje) index $h = o$. Bázu odpovedajúcu h -tej iterácii označme B_h a príslušné bázičné riešenie $\vec{x}_{B_h}$. Vektor odpovedajúcich hodnôt bázičných premenných označujeme $\vec{\beta}_h = (\beta_i^h)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Odpovedajúcu hodnotu účelovej funkcie označme β_h .

Simplexová tabuľka, ktorá odpovedá h -tej iterácii je uvedená v tabuľke 2.7.

Simplexová tabuľka pre h –tu iteráciu

Tabuľka 2.7

$\vec{x}_{Bh}$	$\vec{c}_{Bh}$	c_1	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n	$\vec{\beta}_h$
		$\vec{a}_1$	...	$\vec{a}_m$	$\vec{a}_{m+1}$	...	$\vec{a}_k$	...	$\vec{a}_n$	
		x_1	...	x_m	x_{m+1}	...	x_k	...	x_n	
x_1	c_1	1	...	0	α_{1m+1}^h	...	α_{1k}^h	...	α_{1n}^h	β_1^h
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
x_m	c_m	0	...	1	α_{mm+1}^h	...	α_{mk}^h	...	α_{mn}^h	β_m^h
$z_j - c_j$		0	...	0	γ_{m+1}^h		γ_k^h		γ_n^h	β_h

Jednotlivé časti simplexovej tabuľky majú nasledovný význam:

Prvé tri riadky tabuľky v záhlaví obsahujú postupne ocenenia premenných z účelovej funkcie (vzťah (2.16)), stĺpcové vektory odpovedajúce jednotlivým premenným (vzťah (2.20)) a premenné, ktoré sa vyskytujú v príslušnom EMM (štruktúrne, doplnkové, umelé). Ďalších m riadkov obsahuje transformované koeficienty z obmedzujúcich podmienok a posledný riadok koeficienty $z_j - c_j$ (indexné čísla) a hodnotu účelovej funkcie $f(\vec{x}_{Bh}) = \beta_h$.

V prvom stĺpci tabuľky sú zapísané bázičné premenné x_i , $i = 1, 2, \dots, m$ vyjadrené ako súradnice vektora $\vec{x}_{Bh}$ a v druhom stĺpci ich ocenenia c_i , $i = 1, 2, \dots, m$ vyjadrené vektorom $\vec{c}_{Bh}$. V strednej časti tabuľky sú v prvých m stĺpcoch uvedené jednotkové vektory $\vec{\alpha}_j^h$, $j = 1, 2, \dots, m$, prislúchajúce bázičným premenným a v ďalších stĺpcoch transformované vektory $\vec{\alpha}_j^h = (\alpha_{ij}^h)$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = m+1, m+2, \dots, n$ prislúchajúce nebázičným premenným. Posledný stĺpec tabuľky obsahuje hodnoty bázičných premenných β_i^h , $i = 1, 2, \dots, m$, a ktoré sú prvkami vektora $\vec{\beta}_h$ a odpovedajú príslušnému bázičnému riešeniu $\vec{x}_{Bh}$.

Úpravou vzťahu (2.34) možno koeficienty $z_j - c_j$ vypočítať nasledovným spôsobom:

$$z_j - c_j = \vec{c}_{Bh}^T \cdot \vec{\alpha}_j^h - c_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.61)$$

Hodnotu účelovej funkcie možno vypočítať buď na základe vzťahu (2.25) úpravou EMM na úplný kánonický tvar, alebo využitím vzťahu (2.29), ktorý možno vyjadriť nasledovným spôsobom:

$$f(\vec{x}_{Bh}) = \vec{c}_{Bh}^T \cdot \vec{\beta}_h = \beta_h. \quad (2.62)$$

V tabuľke 2.7 sú jednotkové vektory tvoriace bázu umiestnené v prvých m stĺpcoch. Toto usporiadanie však nie je záväzné, pretože jednotlivé stĺpce v tabuľke možno usporiadať podľa potreby. Jednotkové vektory, ktoré tvoria východiskovú bázu sa zapisujú v simplexovej tabuľke jednoducho pod odpovedajúce bázičné premenné, ktorými sú vo východiskovom riešení pripočítané doplnkové alebo umelé premenné (pozri časť 2.4.2). Potom vo východiskovej simplexovej tabuľke ($h = 0$) sú vektory $\vec{\alpha}_j^0 = \vec{a}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ a vektor $\vec{\beta}_0 = \vec{b}$.

Nazvime v simplexovej tabuľke **stĺpec odpovedajúci premennej vstupujúcej do riešenia „kľúčový stĺpec“** a **riadok odpovedajúci premennej vystupujúcej z riešenia „kľúčový riadok“**. Prvok, nachádzajúci sa v poli, ktoré je spoločné kľúčovému riadku a kľúčovému stĺpcu nazvime **„kľúčový prvok“**. Riadok odpovedajúci indexným číslam nazvime

„indexný riadok“. Kľúčový riadok, kľúčový stĺpec a kľúčový prvok budeme v simplexovej tabuľke farebne zvýrazňovať.

Aplikácia simplexovej metódy v simplexovej tabuľke na riešenie úloh LP je úplne v súlade s odvodeným simplexovým algoritmom v časti 2.4.1. Budeme ju demonštrovať na nasledovných úlohách, ktorých výsledky budeme interpretovať v časti 2.6.

Príklad 2.16.

Riešme simplexovou metódou úlohu obsiahnutú v príklade 2.1 (časť 2.1), ktorej EMM je sformulovaný nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia: $f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 10x_4 \rightarrow \text{maximum}$

Obmedzujúce podmienky:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 300$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 \leq 200$$

Podmienky nezápornosti: $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Riešenie:

Najskôr pomocou doplnkových premenných prepíšeme úlohu do štandardného tvaru (pozri príklad 2.14 v časti 2.4.2) nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia: $f = 20x_1 + 30x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 0d_1 + 0d_2 \rightarrow \text{maximum}$.

Obmedzujúce podmienky:

$$2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + d_1 = 300$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 + d_2 = 200$$

Podmienky nezápornosti: $x_1, x_2, x_3, x_4, d_1, d_2 \geq 0$

1. Určenie východiskového bázičného prípustného riešenia:

Ako sme už konštatovali v príklade 2.14 jednotkové vektory $\vec{a}_5, \vec{a}_6$ prislúchajúce doplnkovým premenným d_1, d_2 sú lineárne nezávislé a vytvárajú východiskovú bázu s maticou východiskovej bázy $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, čiže celkové východiskové bázičké prípustné riešenie má

nasledovný tvar:

$$\vec{x}_{B_0}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, d_1 = 300, d_2 = 200).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_0}) = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 300 + 0 \cdot 200 = 0.$$

Úlohu, ktorá je v súlade s kánonickým tvarom EMM prepíšeme do tabuľky 2.8.

Východisková simplexová tabuľka ($h=0$)

Tabuľka 2.8

$\vec{x}_{B_0}$	$\vec{c}_{B_0}$	20	30	15	10	0	0	$\vec{\beta}_0 = \vec{b}$	$\frac{b_i}{a_{i2}} > 0$
		$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$		
		x_1	x_2	x_3	x_4	d_1	d_2		
d_1	0	2	3	6	5	1	0	300	100
d_2	0	4	8	2	7	0	1	200	25
$z_j - c_j$		-20	-30	-15	-10	0	0	0	

Indexné čísla nachádzajúce sa v poslednom riadku simplexovej tabuľky vypočítame na základe vzťahu (2.61) nasledovným spôsobom:

$$x_1 : z_1 - c_1 = (0, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 20 = -20,$$

$$x_2 : z_2 - c_2 = (0, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} - 30 = -30$$

$$\vdots$$

$$d_2 : z_6 - c_6 = (0, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 0.$$

Hodnota účelovej funkcie $\beta_0 = 0$ odpovedajúca uvedenému bázičnému riešeniu je posledným prvkom v poslednom riadku tabuľky.

2. Test optimálnosti:

V prípade maximalizačnej úlohy je príslušné bázičné riešenie optimálnym vtedy, ak pre všetky indexné čísla platí: $z_j - c_j \geq 0$. Pretože v riadku $z_j - c_j$ majú indexné čísla aj záporné hodnoty, riešenie uvedené v tabuľke 2.8 nie je riešením optimálnym.

3. Prechod k novému bázičnému prípustnému riešeniu:

Za účelom získania nového bázičného prípustného riešenia určíme premennú vstupujúcu do riešenia a premennú vystupujúcu z riešenia:

- Premennou vstupujúcou do bázičného riešenia je nebázičná premenná x_2 , ktorej odpovedá indexné číslo $z_j - c_j = \min[(z_j - c_j) < 0, j \in \{1, 2, \dots, 6\}] = \min[-20, -30, -15, -10] = -30$. Stĺpec, ktorý v simplexovej tabuľke odpovedá premennej x_2 je kľúčový stĺpec.
- Premennú vystupujúcu z bázičného riešenia určíme na základe vzťahu (2.35). Za tým účelom rozšírime simplexovú tabuľku o ďalší stĺpec, do ktorého napíšeme vypočítané

$$\text{podiel} \frac{b_i}{a_{i2}} > 0, i = 1, 2.$$

$$\text{Riadok odpovedajúci hodnote } p = \min_{a_{i2} > 0} \frac{b_i}{a_{i2}} = \min\left(\frac{300}{3}, \frac{200}{8}\right) = 25 \text{ je kľúčovým}$$

riadkom, čiže premenná d_2 je premennou vystupujúcou z bázičného riešenia.

Kľúčovým prvkom je zvýraznené číslo 8 ležiace v priesečníku kľúčového stĺpca a kľúčového riadku.

Nové bázičné riešenie vypočítame transformačným procesom, ktorým sa v dôsledku zmeny bázy sústava rovníc transformuje povolenými elementárnymi úpravami (Gaussova-Jordanova eliminačná metóda) na nový kánonický tvar. Táto úprava vyžaduje, aby sa vektor vstupujúcej premennej do bázy (kľúčový stĺpec) transformoval na jednotkový vektor s jednotkou na mieste kľúčového prvku. Za tým účelom

- najprv vydelíme všetky prvky v kľúčovom riadku kľúčovým prvkom, čím na mieste kľúčového prvku získame jednotku,
- ostatné riadky postupne transformujeme tak, že vydelený riadok kľúčovým prvkom vynásobíme záporným koeficientom nachádzajúcim sa v kľúčovom stĺpci a pripočítame ho k príslušnému riadku. Takto získame na ostatných miestach kľúčového stĺpca nuly.

Transformáciu vektora $\bar{a}_2 = \bar{a}_2^0$ odpovedajúceho premennej x_2 vstupujúcej do riešenia na jednotkový vektor $\bar{a}_2^1$ realizujeme v riešenej úlohe nasledovným spôsobom:

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{a_{22}} * (-a_{12}) + a_{12} \\ \frac{a_{22}}{a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * (-3) + 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12}^1 \\ \alpha_{22}^1 \end{pmatrix} = \vec{\alpha}_2^1$$

Pretože riadky v simplexovej tabuľke predstavujú rovnice, musíme rovnakým spôsobom transformovať všetky prvky v riadkoch. Sústava rovníc sa tým dostane do kánonického tvaru pri bázičných premenných d_1, x_2 , ktoré zapíšeme do stĺpca $\vec{x}_{B1}$ do novej simplexovej tabuľky 2.9. Do druhého stĺpca $\vec{c}_{B1}$ napíšeme ocenenia odpovedajúce novým bázičným premenným. Súčasne v stĺpci $\vec{\beta}_1$ získame výsledky, odpovedajúce uvedenej kombinácii bázičných premenných.

Transformáciu vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{\beta}_1$, ktorý odpovedá novému bázičnému prípustnému riešeniu realizujeme v riešenej úlohe nasledovným spôsobom:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{b_2}{a_{22}} * (-a_{12}) + b_1 \\ \frac{b_2}{a_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 * (-3) + 300 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Novú bázu tvoria vektory $\vec{a}_5, \vec{a}_2$ s maticou bázy $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Nové celkové bázičné prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B1}^T = (x_1 = 0, x_2 = 25, x_3 = 0, x_4 = 0, d_1 = 225, d_2 = 0).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B1}) = 20.0 + 30.25 + 15.0 + 10.0 + 0.225 + 0.0 = 0 = 750.$$

Výsledky transformačných úprav zapisujeme do odpovedajúcich polí novej simplexovej tabuľky 2.9, v ktorej opäť na základe vzťahu (2.61) vypočítame indexné čísla $z_j - c_j$ nachádzajúce sa v poslednom riadku uvedenej tabuľky.

1. iterácia (h=1)

Tabuľka 2.9

$\vec{x}_{B1}$	$\vec{c}_{B1}$	20	30	15	10	0	0	$\vec{\beta}_1$	$\frac{\beta_i}{\alpha_{i3}^1} > 0$
		$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$		
		x_1	x_2	x_3	x_4	d_1	d_2		
d_1	0	0,5	0	5,25	2,375	1	-0,375	225	42,9
x_2	30	0,5	1	0,25	0,875	0	0,125	25	100
$z_j - c_j$		-5	0	-7,5	16,25	0	3,75	75	

2. Test optimálnosti:

Pretože indexné čísla $z_j - c_j$ v tabuľke 2.9 majú aj záporné hodnoty, príslušné riešenie nie je optimálne.

3. Prechod k novému bázičkému prípustnému riešeniu:

- Premennou vstupujúcou do bázičkého riešenia je nebázičká premenná x_3 , ktorej odpovedá $\min(z_j - c_j) = \min(-5, -7, 5) = -7, 5$.
- Premennou vystupujúcou z riešenia je premenná d_1 , ktorej odpovedá

$$\min \frac{\beta_i^1}{\alpha_{i3}^1} = \min(42, 9; 100) = 42, 9.$$

Bázu odpovedajúcu novej kombinácii bázičkých premenných x_3, x_2 tvoria vektory $\vec{a}_3, \vec{a}_2$

s maticou bázy $B_2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Nové celkové bázičké prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_2}^T = (x_1 = 0, x_2 = 14, 286, x_3 = 42, 857, x_4 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_2}) = 20 \cdot 0 + 30 \cdot 14, 286 + 15 \cdot 42, 857 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1071, 429.$$

Transformovanú sústavu rovníc s novým bázičkým riešením prepíšeme do tabuľky 2.10, v ktorej vypočítame odpovedajúce indexné čísla.

2. iterácia (h=2)

Tabuľka 2.10

$\vec{x}_{B_2}$	$\vec{c}_{B_2}$	20	30	15	10	0	0	$\vec{\beta}_2$	$\frac{\beta_i^2}{\alpha_{i1}^2} > 0$
		$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$		
		x_1	x_2	x_3	x_4	d_1	d_2		
x_3	15	0,095	0	1	0,452	0,190	-0,071	42,857	450
x_2	30	0,476	1	0	0,762	-0,048	0,143	14,286	30
$z_j - c_j$		-4,286	0	0	19,643	1,429	3,214	1071,429	

2. Test optimálnosti:

Pretože indexné čísla $z_j - c_j$ v tabuľke 2.10 obsahujú zápornú hodnotu, riešenie v tabuľke 2.10 nie je optimálne.

3. Prechod k novému bázičkému prípustnému riešeniu:

- Premennou vstupujúcou do riešenia je premenná x_1 , ktorej odpovedá jediné záporné indexné číslo $-4, 286$.
- Premennou vystupujúcou z riešenia je premenná x_2 , ktorej odpovedá

$$\min \frac{\beta_i^2}{\alpha_{i1}^2} = \min(450, 30) = 30.$$

Bázu odpovedajúcu novej kombinácii bázičkých premenných x_3, x_1 tvoria vektory $\vec{a}_3, \vec{a}_1$

s maticou bázy $B_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Nové celkové bázičké prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_3}^T = (x_1 = 30, x_2 = 0, x_3 = 40, x_4 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\bar{x}_{B3}) = 20.30 + 30.0 + 15.40 + 10.0 + 0.0 + 0.0 = 1200.$$

Transformovanú sústavu rovníc s novým bázičným riešením prepíšeme do tabuľky 2.11, v ktorej opäť vypočítame odpovedajúce indexné čísla.

Pretože v tabuľke 2.11 nie je žiadne záporné indexné číslo, odpovedajúce bázičné prípustné riešenie je riešenie optimálne.

3. iterácia ($h=3$)

Tabuľka 2.11

$\bar{x}_{B3}$	$\bar{c}_{B3}$	20	30	15	10	0	0	$\bar{\beta}_3$
		$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$	
		x_1	x_2	x_3	x_4	d_1	d_2	
x_3	15	0	-0,2	1	0,3	0,2	-0,1	40
x_1	20	1	2,1	0	1,6	-0,1	0,3	30
$z_i - c_i$		0	9	0	26,5	1	4,5	1200

Príklad 2.17.

Riešme simplexovou metódou úlohu obsiahnutú v príklade 2.2 (časť 2.1), ktorej EMM je sformulovaný a vyjadrený v štandardnom tvare (pozri príklad 2.8) nasledovným spôsobom:

Účelová funkcia:

$$f = 21,3125x_1 + 25,4065x_2 + 0d_1 + 0d_2 \rightarrow \text{maximum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 7 \\ 5,5x_1 & + & 6,1x_2 & - & d_1 & & = & 40 \\ 9,7x_1 & + & 13,04x_2 & & & + & d_2 & = & 130 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0.$$

Riešenie:

Uvedený model bude mať po transformácii na kánonický tvar pomocou umelých premenných (pozri príklad 2.15) nasledovný tvar:

Účelová funkcia:

$$f = 21,3125x_1 + 25,4065x_2 + 0d_1 + 0d_2 - 1000u_1 - 1000u_2 \rightarrow \text{maximum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$\begin{array}{rclclclcl} x_1 & + & x_2 & & & + & u_1 & = & 7 \\ 5,5x_1 & + & 6,1x_2 & - & d_1 & & + & u_2 & = & 40 \\ 9,7x_1 & + & 13,04x_2 & & & + & d_2 & & = & 130 \end{array}$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2, u_1, u_2 \geq 0.$$

Východiskovú bázu tvoria jednotkové vektory $\bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_6$ priradené k bázičným

premenným d_2, u_1, u_2 , s maticou bázy $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Východiskové celkové bázičné prípustné riešenie je nasledovné:

$$\bar{x}_{B_0}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, d_1 = 0, d_2 = 130, u_1 = 7, u_2 = 40).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\bar{x}_{B_0}) = 21,3125.0 + 25,4065.0 + 0.0 + 0.130 - 1000.7 - 1000.40 = -47000.$$

Celý postup riešenia úlohy je uvedený v tabuľke 2.12, ktorá je úspornejším zápisom simplexovej metódy, pretože obsahuje všetky iterácie, potrebné k získaniu optimálneho riešenia. Záhlavie tabuľky sa v iteráciách nemení, preto bude spoločné pre všetky iterácie. Tabuľky odpovedajúce jednotlivým iteráciám sú od seba oddelené hrubou čiarou, indexný stĺpec a indexný riadok v tabuľkách je farebne zvýraznený. Rovnako tmavším odtieňom je zvýraznený i kľúčový prvok.

Indexné čísla nachádzajúce sa v poslednom riadku východiskovej simplexovej tabuľky vypočítame na základe vzťahu (2.61) nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} x_1 : z_1 - c_1 &= (-1000 \quad -1000 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 5,5 \\ 9,7 \end{pmatrix} - 21,3125 = -6521,313 \\ x_2 : z_2 - c_2 &= (-1000 \quad -1000 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 6,1 \\ 13,04 \end{pmatrix} - 25,4065 = -7125,407 \\ &\vdots \\ u_2 : z_6 - c_6 &= (-1000 \quad -1000 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-1000) = 0. \end{aligned}$$

Hodnotu účelovej funkcie odpovedajúcej východiskovému riešeniu môžeme vypočítať podľa vzťahu (2.62) nasledovným spôsobom:

$$f(\bar{x}_{B_0}) = \bar{c}_{B_0}^T \cdot \bar{b} = (-1000 \quad -1000 \quad 0) \begin{pmatrix} 7 \\ 40 \\ 130 \end{pmatrix} = -47000.$$

Keďže ide o maximalizačnú úlohu a v indexnom riadku v tabuľke východiskového riešenia sú záporné indexné čísla, uvedené riešenie nie je optimálne.

Do riešenia vstupuje premenná x_2 , ktorej prislúcha najmenšie záporné indexné číslo. Premennou vystupujúcou z riešenia je premenná u_2 nachádzajúca sa v riadku, ktorému

odpovedá najmenší podiel $\frac{b_i}{a_{i2}} = 6,557$. Číže stĺpec odpovedajúci premennej x_2 je kľúčový

stĺpec a riadok odpovedajúci premennej u_2 je kľúčový riadok. Kľúčový prvok s hodnotou 6,1 sa nachádza v priesečníku kľúčového stĺpca a kľúčového riadku.

Tabuľka odpovedajúca 1. iterácii obsahuje novú kombináciu bázičných premenných

$$u_1, x_2, d_2. \text{ Bázu tvoria vektory } \vec{a}_5, \vec{a}_2, \vec{a}_4 \text{ s maticou } B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6,1 & 0 \\ 0 & 13,04 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnoty v tabuľke odpovedajúcej 1. iterácii sme získali transformačným procesom sústavy rovníc z východiskovej tabuľky na kánonický tvar pri novej kombinácii báziických premenných, ktorého techniku sme podrobnejšie vysvetlili pri riešení úlohy v príklade 2.16.

Celkové báziické prípustné riešenie odpovedajúce uvedenej báze je nasledovné:

$$\bar{x}_{B1}^T = (x_1 = 0, x_2 = 6,557, d_1 = 0, d_2 = 44,492, u_1 = 0,443, u_2 = 0).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\bar{x}_{B1}) = 21,3125.0 + 25,4065.6,557 + 0.0 + 0.44,492 - 1000.0,443 - 1000.0 = -276,023.$$

Hodnoty indexných čísiel vypočítame na základe vzťahu (2.61).

Riešenie úlohy z príkladu 2.17 simplexovou metódou

Tabuľka 2.12

h	$\bar{x}_{Bh}$	$\bar{c}_{Bh}$	21,3125	25,4065	0	0	-1000	-1000	$\bar{\beta}_h$	$\frac{\beta_i^h}{\alpha_{ik}^h} > 0$
			$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	$\bar{a}_3$	$\bar{a}_4$	$\bar{a}_5$	$\bar{a}_6$		
			x_1	x_2	d_1	d_2	u_1	u_2		
východisk. riešenie	u_1	-1000	1	1	0	0	1	0	7	7
	u_2	-1000	5,5	6,1	-1	0	0	1	40	6,557
	d_2	0	9,7	13,04	0	1	0	0	130	9,969
	$z_j - c_j$		-6521,313	-7125,40	1000	0	0	0	-47000	
1. iterácia	u_1	-1000	0,098	0	0,164	0	1	-0,164	0,443	2,7
	x_2	25,4	0,902	1	-0,164	0	0	0,164	6,557	-
	d_2	0	-2,057	0	2,138	1	0	-2,138	44,492	20,813
	$z_j - c_j$		-96,766	0	-168,1	0	0	1168,1	-276,02	
2. iterácia	d_1	0	0,6	0	1	0	6,1	-1	2,7	
	x_2	25,4	1	1	0	0	1	0	7	
	d_2	0	-3,34	0	0	1	-13,04	0	38,72	
	$z_j - c_j$		4,094	0	0	0	1025,41	1000	177,84	

V indexnom riadku v tabuľke odpovedajúcej 1. iterácii sa vyskytujú stále záporné indexné čísla, teda príslušné riešenie nie je optimálne.

Do riešenia vstupuje premenná d_1 , ktorej prislúcha najmenšie záporné indexné číslo. Premennou vystupujúcou z riešenia je premenná u_1 nachádzajúca sa v riadku, ktorému

odpovedá najmenší podiel $\frac{\beta_i^1}{\alpha_{i3}^1} = 2,7$. Stĺpec odpovedajúci premennej d_1 je kľúčový stĺpec

a riadok odpovedajúci premennej u_1 je kľúčový riadok. Kľúčový prvok s hodnotou 0,164 sa nachádza v priesečníku kľúčového stĺpca a kľúčového riadku.

Tabuľka odpovedajúca 2. iterácii obsahuje novú kombináciu báziických premenných

$$d_1, x_2, d_2. \text{ Bázu tvoria vektory } \bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_4 \text{ s maticou } B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6,1 & 0 \\ 0 & 13,04 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hodnoty v tabuľke odpovedajúcej 2. iterácii sme opäť vypočítali transformačným procesom sústavy rovníc na kánonický tvar pri novej kombinácii báziických premenných.

Celkové bázičné prípustné riešenie odpovedajúce uvedenej báze je nasledovné:

$$\bar{x}_{B2}^T = (x_1 = 0, x_2 = 7, d_1 = 2,7, d_2 = 38,72, u_1 = 0, u_2 = 0).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\bar{x}_{B2}) = 21,3125.0 + 25,4065.7 + 0.2.7 + 0.38,72 - 1000.0 - 1000.0 = 177,8455.$$

Hodnoty indexných čísiel vypočítame opäť na základe vzťahu (2.61). Vidíme, že sa v indexnom riadku nevyskytuje žiadne záporné číslo, riešenie vypočítané v 2. iterácii je riešením optimálnym.

Príklad 2.18.

Riešme simplexovou metódou úlohu obsiahnutú v príklade 2.3 (časť 2.1), ktorej EMM je nasledovný:

Účelová funkcia:

$$f = 15x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 26x_4 \rightarrow \text{minimum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 24,5$$

$$6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 \geq 38$$

$$3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 \geq 43.$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, d_1, d_2 \geq 0.$$

Riešenie:

Pomocou doplnkových premenných, ktoré na ľavej strane prvej obmedzujúcej podmienky pripočítame a na pravých stranách druhej a tretej podmienky odpočítame, prepíšeme úlohu do štandardného tvaru. Do účelovej funkcie dáme doplnkovým premenným nulové ocenenia. EMM úlohy v štandardnom tvare je nasledovný:

Účelová funkcia:

$$f = 15x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 26x_4 + 0d_1 + 0d_2 + 0d_3 \rightarrow \text{minimum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + d_1 = 24,5$$

$$6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 - d_2 = 38$$

$$3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 - d_3 = 43.$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, d_1, d_2, d_3 \geq 0.$$

Kánonický tvar uvedeného modelu vytvoríme tak, že na ľavé strany obmedzujúcich podmienok, v ktorých nie sú pripočítané doplnkové premenné, pripočítame nezáporné umelé premenné, ktorým do účelovej funkcie priradíme nepriaznivé prohibívne ocenenia M , ktoré vzhľadom na to, že úloha má minimalizačný charakter, položíme veľké kladné číslo, napr. $M = 10000$.

Rozšírená úloha bude mať nasledovný tvar:

Účelová funkcia:

$$f = 15x_1 + 18x_2 + 24x_3 + 26x_4 + 0d_1 + 0d_2 + 0d_3 + 10000u_1 + 10000u_2 \rightarrow \text{minimum}$$

Obmedzujúce podmienky:

$$4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 + d_1 = 24,5$$

$$6x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 - d_2 + u_1 = 38$$

$$3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 - d_3 + u_2 = 43.$$

Podmienky nezápornosti:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, d_1, d_2, d_3, u_1, u_2 \geq 0.$$

Východiskovú bázu tvoria jednotkové vektory $\vec{a}_5, \vec{a}_8, \vec{a}_9$ priradené k bázičným premenným

$$d_1, u_1, u_2, \text{ s maticou } B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Celkové východiskové bázičké prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_0}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, d_1 = 24,5, d_2 = 0, d_3 = 0, u_1 = 38, u_2 = 43).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_0}) = 15.0 + 18.0 + 24.0 + 26.0 + 0.24,5 + 0.0 + 0.0 + 10000.38 + 10000.43 = 810000.$$

Celý postup riešenia úlohy je uvedený v tabuľke 2.13.

V tabuľke 2.13 sme vzhľadom k veľkým hodnotám indexných čísiel formálne indexný riadok $z_j - c_j$ rozdelili na dva riadky z_j a $-c_j$, pričom v tabuľke za M nedosadzujeme zvolenú hodnotu. Sazbu M dáme na začiatok riadku, v ktorom sú uvedené iba čísla pri M . Nezabudnime však na to, že $M = 10000$ a indexné čísla majú tvar $z_j - c_j$. Napríklad indexné číslo

$$z_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10000 & 10000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - 15 = 89985 \quad \text{zapišeme do simplexovej tabuľky}$$

nasledovným spôsobom:

- do prvého riadku: $z_1 = \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 9M$ napíšeme číslo 9,
- do druhého riadku: $-c_1 = -15$.

Z tab. 2.13 je zrejmé, že východiskové riešenie nie je optimálne, pretože obsahuje kladné indexné čísla (ide o minimalizačnú úlohu). Premennou vstupujúcou do riešenia je premenná x_3 , premennou vystupujúcou z riešenia je premenná d_1 . Odpovedajúci kľúčový riadok a kľúčový stĺpec ako i kľúčový prvok sú v tabuľke farebne zvýraznené.

V časti tabuľky „1.iterácia“ je uvedená transformovaná sústava rovníc s bázičným riešením odpovedajúcim novej kombinácii premenných x_3, u_1, u_2 . Bázu tvoria vektory $\vec{a}_3, \vec{a}_8, \vec{a}_9$

$$\text{s maticou bázy } B_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odpovedajúce celkové bázičké prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_1}^T = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4,083, x_4 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0, u_1 = 5,333, u_2 = 6,25).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_1}) = 15.0 + 18.0 + 24.4,083 + 26.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 10000.5,333 + 10000.6,25 = 115928.$$

V simplexovej tabuľke odpovedajúcej 1.iterácii je uvedená hodnota vyjadrená v tvare: $11,583M + 98$.

Pretože indexné čísla odpovedajúce uvedenému riešeniu obsahujú aj kladné hodnoty, uvedené riešenie nie je optimálne. Premennou vstupujúcou do riešenia je premenná x_2 , premennou vystupujúcou z riešenia je premenná u_2 . Odpovedajúci kľúčový riadok a kľúčový stĺpec ako i kľúčový prvok sú v tabuľke farebne zvýraznené.

Riešenie úlohy z príkladu 2.18 simplexovou metódou

Tabuľka 2.13

h	$\vec{x}_{B_h}$	$\vec{c}_{B_h}$	15	18	24	26	0	0	0	M	M	$\bar{\beta}_h$
			$\vec{a}_1$	$\vec{a}_2$	$\vec{a}_3$	$\vec{a}_4$	$\vec{a}_5$	$\vec{a}_6$	$\vec{a}_7$	$\vec{a}_8$	$\vec{a}_9$	
			x_1	x_2	x_3	x_4	d_1	d_2	d_3	u_1	u_2	
východisk. riešenie	d_1	0	4	3	6	5	1	0	0	0	0	24,5
	u_1	M	6	5	8	7	0	-1	0	1	0	38
	u_2	M	3	7	9	7	0	0	-1	0	1	43
	z_j	M	9	12	17	14	0	-1	-1	0	0	81
	$-c_j$		-15	-18	-24	-26	0	0	0	0	0	0
1. iterácia	x_3	24	0,667	0,5	1	0,833	0,167	0	0	0	0	4,083
	u_1	M	0,667	1	0	0,333	-1,333	-1	0	1	0	5,333
	u_2	M	-3	2,5	0	-0,5	-1,5	0	-1	0	1	6,25
	z_j	M	-2,333	3,5	0	-1,667	-2,833	-1	-1	0	0	11,583
	$-c_j$		1	-6	0	-6	4	0	0	0	0	98
2. iterácia	x_3	24	1,267	0	1	0,933	0,467	0	0,2	0	-0,2	2,833
	u_1	M	1,867	0	0	0,533	-0,733	-1	0,4	1	-0,4	2,833
	x_2	18	-1,2	1	0	-0,2	-0,6	0	-0,4	0	0,4	2,5
	z_j	M	1,867	0	0	0,533	-0,733	-1	0,4	0	-1,4	2,833
	$-c_j$		-6,2	0	0	-7,2	0,4	0	-2,4	0	2,4	113
3. iterácia	x_3	24	0	0	1	0,571	0,964	0,676	-0,071	-0,679	0,071	0,911
	x_1	15	1	0	0	0,286	-0,393	-0,536	0,214	0,536	-0,214	1,518
	x_2	18	0	1	0	0,143	-1,071	-0,643	-0,143	0,643	0,143	4,321
	z_j	M	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
	$-c_j$		0	0	0	-5,423	-2,036	-3,321	-1,071	3,321	1,071	122,411

V časti tabuľky „2.iterácia“ je uvedená transformovaná sústava rovníc s bázičným riešením odpovedajúcim novej kombinácii premenných x_3, u_1, x_2 . Bázu tvoria vektory $\vec{a}_3, \vec{a}_8, \vec{a}_2$

$$\text{s maticou bázy } B_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Odpovedajúce celkové bázičné prípustné riešenie je nasledovné:

$$\vec{x}_{B_2}^T = (x_1 = 0, x_2 = 2,5, x_3 = 2,833, x_4 = 0, d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0, u_1 = 2,833, u_2 = 0).$$

Hodnota účelovej funkcie sa pri uvedenom riešení rovná:

$$f(\vec{x}_{B_2}) = 15.0 + 18.2,5 + 24.2,833 + 26.0 + 0.0 + 0.0 + 0.0 + 10000.2,833 + 10000.0 = 28443 \\ (2,833M + 113).$$