Derivácia funkcie

1. Vypočítajte prvú deriváciu funkcie:

a) $f: y = 3x^2 - 4x + 5$ $\qquad [f'(x) = 6x - 4]$

b) $g: y = \frac{x^4}{4} + 2x^3 - x^2 - 1$ $\qquad \left[g'(x) = x^3 + 6x^2 - 2x\right]$

c) $h: b = 2a^2 - 3a + 4$ $\qquad [h'(a) = 4a - 3]$

d) $u: b = 2 \cdot e^a + \ln a$ $\qquad \left[u'(a) = 2 \cdot e^a + \frac{1}{a}\right]$

e) $f: y = 4 \cdot \sin x + 5\ln x - 10$ $\qquad \left[f'(x) = 4 \cdot \cos x + \frac{5}{x}\right]$

f) $f: y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ $\qquad \left[f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$

2. Vypočítajte prvú deriváciu danej funkcie:

a) $f: y = x^2 \cdot \cos x$ $\qquad \left[f'(x) = 2x \cdot \cos x - x^2 \cdot \sin x\right]$

b) $g: b = a^4 \cdot \ln a$ $\qquad \left[g'(a) = a^3 \cdot (4 \cdot \ln a + 1)\right]$

c) $f: y = x^3 \cdot e^x$ $\qquad \left[f'(x) = x^2 \cdot e^x \cdot (3 + x)\right]$

d) $h: y = \frac{1 + x^2}{1 - x}$ $\qquad \left[h'(x) = \frac{1 + 2x - x^2}{(1 - x)^2}\right]$

e) $u: y = \frac{3x}{x^2 - 4}$ $\qquad \left[u'(x) = -\frac{3(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}\right]$

3. Vypočítajte prvú deriváciu zloženej funkcie:

a) $f: y = \cos 4x$ $\qquad \left[f'(x) = -4 \cdot \sin 4x\right]$

b) $g: y = \ln(5 - x^3)$ $\qquad \left[g'(x) = -\frac{3x^2}{5 - x^3}\right]$

c) $g: y = \ln\left(\frac{2}{x - 3}\right)$ $\qquad \left[g'(x) = -\frac{1}{x - 3}\right]$

d) $h: y = \sqrt{4 - x}$ $\qquad \left[h'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{4 - x}}\right]$

e) $u: y = \sin^3 x$ $\qquad \left[u'(x) = 3 \cdot \cos x \cdot \sin^2 x\right]$

Zadanie - derivácie podielu funkcií

Funkcia	Výsledok
1. $y=\dfrac{x^2}{x-3}$	$\dfrac{x^2-6x}{(x-3)^2}$
2. $y=\dfrac{4x^2}{x+5}$	$\dfrac{4x\cdot(x+10)}{(x+5)^2}$
3. $y=\dfrac{x^2+1}{3x}$	$\dfrac{x^2-1}{3x^2}$
4. $y=\dfrac{2+x^2}{x}$	$\dfrac{x^2-2}{x^2}$
5. $y=\dfrac{1-3x}{4-2x}$	$\dfrac{-10}{(4-2x)^2}$ =po úprave $\dfrac{-5}{2\cdot(2-x)^2}$
6. $y=\dfrac{3+x}{4-x}$	$\dfrac{7}{(4-x)^2}$
7. $y=\dfrac{1-x}{x^2}$	$\dfrac{x-2}{x^3}$
8. $y=\dfrac{5x}{x^2+1}$	$\dfrac{5\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
9. $y=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$	$-\dfrac{1+2\ln x}{x^3}$
10. $y=\dfrac{x}{1-4x}$	$\dfrac{1}{(1-4x)^2}$

Príklady - derivácie podielu funkcií

1. $y = \dfrac{x^2}{x-3} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{2x\cdot(x-3) - x^2\cdot 1}{(x-3)^2} = \dfrac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$

2. $y = \dfrac{4x^2}{x+5} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{8x\cdot(x+5) - 4x^2\cdot 1}{(x+5)^2} = \dfrac{8x^2 + 40 - 4x^2}{(x+5)^2} = \dfrac{4x^2 + 40}{(x+5)^2} = \dfrac{4\cdot(x^2+10)}{(x+5)^2}$

3. $y = \dfrac{x^2+1}{3x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{2x\cdot 3x - (x^2+1)\cdot 3}{9x^2} = \dfrac{6x^2 - 3x^2 - 3}{9x^2} = \dfrac{3x^2 - 3}{9x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{3x^2}$

4. $y = \dfrac{2+x^2}{x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{2x\cdot x - (2+x^2)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 2 - x^2}{x^2} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2}$

5. $y = \dfrac{1-3x}{4-2x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{-3\cdot(4-2x) - (1-3x)\cdot(-2)}{(4-2x)^2} = \dfrac{-12 + 6x + 2 - 6x}{(4-2x)^2} = \dfrac{-10}{(4-2x)^2} =$

$$= \frac{-5\cdot 2}{[2\cdot(2-x)]^2} = \frac{-5\cdot 2}{2\cdot 2(2-x)^2} = \frac{-5}{2\cdot(2-x)^2}$$

6. $y = \dfrac{3+x}{4-x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1\cdot(4-x) - (3+x)\cdot(-1)}{(4-x)^2} = \dfrac{4 - x + 3 + x}{(4-x)^2} = \dfrac{7}{(4-x)^2}$

7. $y = \dfrac{1-x}{x^2} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{-1\cdot x^2 - (1-x)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x^2 - 2x + 2x^2}{x^4} = \dfrac{x^2 - 2x}{x^4} = \dfrac{x\cdot(x-2)}{x^4} =$

$$= \frac{x-2}{x^3}$$

8. $y = \dfrac{5x}{x^2+1} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{5\cdot(x^2+1) - 5x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{5x^2 + 5 - 10x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{5 - 5x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{5\cdot(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

9. $y = \dfrac{1+\ln x}{x^2} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1+\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x - (1+\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{x\cdot[1 - 2\cdot(1+\ln x)]}{x^4} =$

$$= \frac{1 - 2 - 2\ln x}{x^3} = \; = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3} = \; -\frac{1 + 2\ln x}{x^3}$$

10. $y = \dfrac{x}{1-4x} \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{1\cdot(1-4x) - x\cdot(-4)}{(1-4x)^2} = \dfrac{1 - 4x + 4x}{(1-4x)^2} = \dfrac{1}{(1-4x)^2}$

Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie

Smernica dotyčnice ku grafu funkcie reprezentuje *geometrický význam derivácie funkcie*. Uvedieme teraz rovnicu dotyčnice.

📖 Derivácia funkcie f v bode x_0 vyjadruje **smernicu dotyčnice** k_t ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $T = [x_0,\ f(x_0)]$, teda platí $k_t = f'(x_0)$.
Rovnica dotyčnice má vyjadrenie

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Príklad 3. Vypočítajme rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f : y = x^2 - 4x + 2$ v bode $T = [x_0,\ f(x_0)] = [1,\ f(x_0)]$.
Riešenie:
Smernicu dotyčnice ku grafu danej funkcie vypočítame pomocou prvej derivácie funkcie f

$$f'(x) = (x^2 - 4x + 2)' = 2x - 4.$$

Potom pre $x_0 = 1$ dostávame hodnotu smernice dotyčnice

$$k_t = f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

Druhú súradnicu (t. j. *y*-ovú súradnicu) dotykového bodu vypočítame ako funkčnú hodnotu $f(x_0)$ pre $x_0 = 1$:

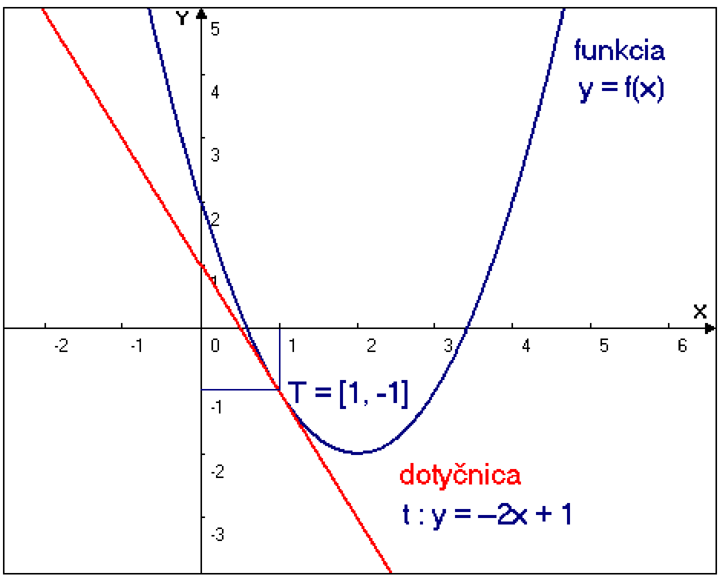
$$f(1) = (1)^2 - 4 \cdot (1) + 2 = -1.$$

Rovnica dotyčnice má vyjadrenie

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - (-1) = -2(x - 1)$$

Po ďalších úpravách platí

$$y + 1 = -2x + 2 \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 1$$



Grafické znázornenie funkcie a dotyčnice je na obrázku.