Parciálne derivácie zloženej funkcie

Zložená funkcia s jednou vnútornou zložkou

a– vnútorná zložka funkcie, b– vonkajšia zložka funkcie

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial b}{\partial a}}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial a}}$$

Príklad 1: Parciálne derivácie 1. a 2. rádu pre zloženú funkciu

$$f: z=\ln\left(\frac{3x-2y}{4y}\right)$$

vnútorná zl. $a=\dfrac{3x-2y}{4y}$

$$\Rightarrow a'_x=\left(\frac{3x-2y}{4y}\right)'=\frac{(3x-2y)'\cdot 4y-(3x-2y)\cdot(4y)'}{(4y)^2}$$

$$=\frac{(3-0)\cdot 4y-(3x-2y)\cdot 0}{16y^2}=\frac{12\cdot y}{16y^2}=\frac{3}{4y}$$

$$\Rightarrow a'_y=\left(\frac{3x-2y}{4y}\right)'=\frac{(3x-2y)'\cdot 4y-(3x-2y)\cdot(4y)'}{(4y)^2}$$

$$=\frac{(0-2)\cdot 4y-(3x-2y)\cdot 4}{16y^2}=\frac{-8y-12x+8y}{16y^2}=\frac{-12x}{16y^2}=\frac{-3x}{4y^2}$$

vonkajšia zl. $b=\ln a\Rightarrow\dfrac{\partial b}{\partial a}=\dfrac{1}{a}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{3}{4y}\cdot\frac{1}{a}=\frac{3}{4y}\cdot\frac{1}{\frac{3x-2y}{4y}}=\frac{3}{4y}\cdot\frac{4y}{3x-2y}=\frac{3y}{3x-2y}$$

(1)

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{-3x}{4y^2}\cdot\frac{1}{a}=\frac{-3x}{4y^2}\cdot\frac{1}{\frac{3x-2y}{4y}}=\frac{-3x}{4y^2}\cdot\frac{4y}{3x-2y}=\frac{-3x}{y(3x-2y)}=$$

$$=\frac{-3x}{3xy-2y^2}$$

(3)

(4)

(1) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(\frac{3y}{3x-2y}\right)_x'=\frac{(3y)'\cdot(3x-2y)-3y\cdot(3x-2y)'}{(3x-2y)^2}$$

$$=\frac{0\cdot(3x-2y)-3y\cdot(3-0)}{(3x-2y)^2}=\frac{-9y}{(3x-2y)^2}$$

(2) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\left(\frac{3y}{3x-2y}\right)_y'=\frac{(3y)'\cdot(3x-2y)-3y\cdot(3x-2y)'}{(3x-2y)^2}$$

$$=\frac{3\cdot(3x-2y)-3y\cdot(0-2)}{(3x-2y)^2}=\frac{9x-6y+6y}{(3x-2y)^2}=\frac{9x}{(3x-2y)^2}$$

(3) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{-3x}{3xy-2y^2}\right)_y'=\frac{(-3x)'\cdot(3xy-2y^2)-(-3x)\cdot(3xy-2y^2)'}{(3xy-2y^2)^2}$$

$$=\frac{0\cdot(3xy-2y^2)+3x\cdot(3x-4y)}{(3xy-2y^2)^2}=\frac{9x^2-12xy}{(3xy-2y^2)^2}$$

(4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\left(\frac{-3x}{3xy-2y^2}\right)_x'=\frac{(-3x)'\cdot(3xy-2y^2)-(-3x)\cdot(3xy-2y^2)'}{(3xy-2y^2)^2}$$

$$=\frac{(-3)\cdot(3xy-2y^2)+3x\cdot(3y-0)}{(3xy-2y^2)^2}=\frac{-9xy+6y^2+9xy}{(3xy-2y^2)^2}=\frac{6y^2}{(3xy-2y^2)^2}$$

Príklad 2: Parciálne derivácie 1. rádu pre zloženú funkciu

$$f: z=arctg(3x-2y)$$

Riešenie:

$$a=3x-2y \quad\Rightarrow a_x'=(3x-2y)'=3$$

$$\Rightarrow a_y'=(3x-2y)'=-2$$

$$b=arctga\Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a}=\frac{1}{1+a^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial b}{\partial a}=3\cdot\frac{1}{1+a^2}=\frac{3}{1+(3x-2y)^2}=\frac{3}{1+9x^2-12xy+4y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial b}{\partial a}=-2\cdot\frac{1}{1+a^2}=\frac{-2}{1+(3x-2y)^2}=\frac{-2}{1+9x^2-12xy+4y^2}$$

Príklad 3: Vypočítajme rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f: z = \dfrac{2x-4y}{3x}$ v dotykovom bode $T = [2, 4, z_0]$

Riešenie: Vypočítame tretiu súradnicu dotykového bodu:

$$z_0 = f(2,4) = \frac{2\cdot 2 - 4\cdot 4}{3\cdot 2} \Rightarrow T = [2,4,-2]$$

Parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{2x-4y}{3x}\right)'_x = \frac{2\cdot 3x - (2x-4y)\cdot 3}{(3x)^2} = \frac{6x-6x+12y}{9x^2} = \frac{12y}{9x^2} = \frac{4y}{3x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2x-4y}{3x}\right)'_y = \frac{(0-4)\cdot 3x - (2x-4y)\cdot 0}{(3x)^2} = \frac{-12x-0}{9x^2} = -\frac{4}{3x}$$

Hodnoty parciálnych derivácií v bode $[x_0, y_0] = [2,4]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,4) = \frac{4\cdot 4}{3\cdot 2^2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,4) = -\frac{4}{3\cdot 2} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow T = [2,4,-2]$$

Vypočítané údaje dosadíme do rovnice dotykovej roviny a rovnicu upravíme:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$z - (-2) = \frac{4}{3}\cdot(x-2) + (-\frac{2}{3})\cdot(y-4)$$

$$z + 2 = \frac{4}{3}\cdot x - \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\cdot y + \frac{8}{3}$$

$\boxed{z = \dfrac{4}{3}\cdot x - \dfrac{2}{3}\cdot y + 2}$ rovnica dotykovej roviny

Príklad 4: Vypočítajme rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie

$f: z = \ln\dfrac{5y}{2y-3x}$ **v dotykovom bode** $T = [1, 2, z_0]$

Riešenie: Vypočítame tretiu súradnicu dotykového bodu

$$z_0 = f(1,2) = \ln\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2 - 3\cdot 1} = \ln\frac{10}{1} = \ln 10 \Rightarrow T = [1, 2, \ln 10]$$

Parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x,y)$:

$$a = \frac{5y}{2y-3x} \quad \Rightarrow a'_x = \left(\frac{5y}{2y-3x}\right)' = \frac{(5y)'\cdot(2y-3x) - (5y)\cdot(2y-3x)'}{(2y-3x)^2}$$

$$= \frac{(3-0)\cdot 4y - (3x-2y)\cdot 0}{16y^2} = \frac{12\cdot y}{16y^2} = \frac{3}{4y}$$

$$\Rightarrow a'_y = \left(\frac{3x-2y}{4y}\right)' = \frac{(3x-2y)'\cdot 4y-(3x-2y)\cdot(4y)'}{(4y)^2} = \frac{(0-2)\cdot 4y-(3x-2y)\cdot 4}{16y^2}$$

$$= \frac{-8y-12x+8y}{16y^2} = \frac{-12x}{16y^2} = \frac{-3x}{4y^2}$$

$$b = \ln a \Rightarrow \frac{\partial b}{\partial a} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{2x-4y}{3x}\right)'_x = \frac{2\cdot 3x-(2x-4y)\cdot 3}{(3x)^2} = \frac{6x-6x+12y}{9x^2} = \frac{12y}{9x^2} = \frac{4y}{3x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2x-4y}{3x}\right)'_y = \frac{(0-4)\cdot 3x-(2x-4y)\cdot 0}{(3x)^2} = \frac{-12x-0}{9x^2} = -\frac{4}{3x}$$

Lokálne extrémy funkcie

Príklad 5: Vypočítajte stacionárne body a lokálne extrémy funkcie

$$f(x,y) = x^2-12xy+4y^3+6$$

Riešenie:

1. Vypočítame parciálne derivácie prvého rádu

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2-12xy+4y^3+6)'_x = 2x-12y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2-12xy+4y^3+6)'_y = -12x+12y^2$$

2. Stacionárne body funkcie zistíme riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$2x-12y=0 \quad\Rightarrow\quad 2x=12y \Rightarrow \quad x=6y$$

$$-12x+12y^2=0$$

$$-12\cdot 6y+12y^2=0$$

$$-6y+y^2=0$$

$$y(-6+y)=0 \quad\Rightarrow\quad y_1=0,\quad y_2=6$$

$$\Rightarrow\quad x_1=0,\quad x_2=36$$

Stacionárne body majú súradnice:

$A=[0,0],\quad B=[36,6]$

3. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2x-12y)'_x = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (2x - 12y)'_y = -12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-12x + 12y^2)'_y = 24y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (-12x + 12y^2)'_x = -12$$

4. Pomocou determinantu D rozhodneme o existencii a druhu lokálneho extrému

Determinant $D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 24y \end{vmatrix}$

Hodnota determinantu pre stacionárny bod $A = [0,0]$

$$D_{A[0,0]} = \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 24 \cdot 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 144 = -144 < 0$$

Z toho vyplýva, že funkcia $f(x,y)$ nemá extrém v stacionárnom bode $A = [0,0]$.

Hodnota determinantu pre stacionárny bod $B = [36, 6]$

$$D_{B[36,6]} = \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 24 \cdot 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -12 \\ -12 & 144 \end{vmatrix} = 288 - 144 = 144 > 0$$

Z toho vyplýva, že daná funkcia $f(x,y)$ má lokálny extrém v stacionárnom bode $B = [36, 6]$.

Pretože pre hodnotu druhej parciálnej derivácie platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$,

funkcia má v stacionárnom bode $B = [36, 6]$ lokálne minimum.

Funkčná hodnota je

$$f(x,y) = x^2 - 12xy + 4y^3 + 6$$

$$f(36,6) = 36^2 - 12 \cdot 36 \cdot 6 + 4 \cdot 6^3 + 6 = 1296 - 2592 + 864 + 6 = -426$$

Viazané lokálne extrémy funkcie

Príklad 6: Vypočítajte viazané lokálne extrémy funkcie

Lagrangeovou metódou nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = x^3 + y^2$,
ak podmienka väzby je $3x + 2y - 10 = 0$.

Riešenie:

1) Vytvoríme pomocnú funkciu (Lagrangeovu)

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

$$F(x,y) = x^3 + y^2 + \lambda(3x + 2y - 10)$$

$$F(x,y) = x^3 + y^2 + 3\lambda x + 2\lambda y - 10\lambda$$

2) Vypočítame parciálne derivácie 1. rádu funkcie $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (x^3 + y^2 + 3\lambda x + 2\lambda y - 10\lambda)' = 3x^2 + 0 + 3\lambda + 0 - 0 = 3x^2 + 3\lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (x^3 + y^2 + 3\lambda x + 2\lambda y - 10\lambda)' = 0 + 2y + 0 + 2\lambda - 0 = 2y + 2\lambda$$

3) Stacionárne body a koeficient λ vypočítame zo sústavy rovníc:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 3x^2 \qquad + 3\lambda = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} x^2 \qquad + \lambda \;= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -x^2 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r} 2y + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \; y + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \; y - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \; y = x^2 \\ 3x + 2y - 10 = 0 \end{array}$$

$$3x + 2x^2 - 10 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 49 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{4} = 1 \quad \Rightarrow y_1 = x^2 \quad \Rightarrow y_1 = 1 \quad \Rightarrow \lambda_1 = -x^2 = 1$$

$$x_2 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2} \Rightarrow \; y_2 = x^2 \; \Rightarrow y_2 = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \quad \Rightarrow \lambda_2 = -x^2 = \frac{25}{4}$$

Zistili sme stacionárne body:

$A = [1,1]$ pre $\lambda_1 = 1$, $\quad B = [\frac{-5}{2}, \frac{25}{4}]$ pre $\lambda_2 = \frac{25}{4}$

4) Vypočítame parciálne derivácie 2. rádu funkcie $F(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = (3x^2 + 3\lambda)' = 6x \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = (3x^2 + 3\lambda)' = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = (2y + 2\lambda)' = 2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = (2y + 2\lambda)' = 0$$

5) Determinant

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6x & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}$$

Determinant pre stacionárny bod $A=[1,1]$

$$D_{A[1,1]}=\begin{vmatrix}6\cdot 1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=12-0=12>0$$

Determinant je kladný, teda funkcia $F(x,y)$ má lokálny extrém v stacionárnom bode $A=[1,1]$. Pretože pre hodnotu druhej derivácie platí $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=6>0$,

funkcia $F(x,y)$ má v stacionárnom bode $A=[1,1]$ lokálne minimum.
Pre funkciu $f(x,y)$ to znamená, že v bode $A=[1,1]$ má
viazané lokálne minimum.
Funkčná hodnota $f(x,y)=x^3+y^2 \quad \Rightarrow \quad f(1,1)=1^3+1^2=2$

Determinant pre stacionárny bod $B=[\frac{-5}{2},\frac{25}{4}]$

$$D_{B[-\frac{5}{2},\frac{25}{4}]}=\begin{vmatrix}6\cdot\frac{-5}{2} & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-15 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-30-0=-30<0$$

funkcia $F(x,y)$ nemá lokálny extrém v stacionárnom bode $B=[\frac{-5}{2},\frac{25}{4}]$,

funkcia $f(x,y)$ nemá viazaný lokálny extrém v bode $B=[\frac{-5}{2},\frac{25}{4}]$.

Príklad 7: Vypočítajte viazané lokálne extrémy funkcie

a) Lagrangeovou metódou nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y)=x^2-2y^2+3$, ak podmienka väzby je $x+y-4=0$.

Riešenie:

1) Vytvoríme pomocnú funkciu (Lagrangeovu)

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$
$$F(x,y)=x^2-2y^2+3+\lambda(x+y-4)$$
$$F(x,y)=x^2-2y^2+3+\lambda x+\lambda y-4\lambda$$

2) Vypočítame parciálne derivácie 1. rádu funkcie $F(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x^2-2y^2+3+\lambda x+\lambda y-4\lambda)'=2x+\lambda$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=(x^2-2y^2+3+\lambda x+\lambda y-4\lambda)'=-4y+\lambda$$

3) Stacionárne body a koeficient λ vypočítame zo sústavy rovníc:

$$\begin{array}{lclcl} \frac{\partial F}{\partial x}=0 & & 2x \quad +\lambda=0 & & 2x \quad +\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-2x \\ \frac{\partial F}{\partial y}=0 & \Rightarrow & -4y+\lambda=0 & \Rightarrow & -4y+\lambda=0 \\ g(x,y)=0 & & x+y-4=0 & & x+y-4=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -4y+(-2x)=0 \quad \Rightarrow -2y-x=0 \quad \Rightarrow -2y=x \\ x+y-4=0 \\ \hline -2y+y-4=0 \\ -y-4=0 \end{array}$$

$$y=-4 \quad \Rightarrow \quad x=-2y \Rightarrow \quad x=-2\cdot(-4)=8$$
$$\Rightarrow \lambda=-2x=-2\cdot 8=-16$$

Stacionárny bod: $A=[8,-4]$ pre $\lambda=-16$

4) Vypočítame parciálne derivácie 2. rádu funkcie $F(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=(2x+\lambda)'=2 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=(2x+\lambda)'=0$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=(-4y+\lambda)'=-4 \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}=(-4y+\lambda)'=0$$

5) Determinant

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=-8-0=-8<0$$

Determinant pre stacionárny bod $A=[8,-4]$

Determinant je záporný, funkcia $F(x,y)$ nemá lokálny extrém v stacionárnom bode $A=[8,-4]$. Funkcia $f(x,y)$ nemá viazaný extrém v bode $A=[8,-4]$.

b) Dosadzovacou metódou nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y)=x^2-2y^2+3$, ak podmienka väzby je $x+y-4=0$.

Riešenie: $y=4-x$

$$f(x,y)=x^2-2y^2+3$$
$$f(x,y)=x^2-2(4-x)^2+3=x^2-2(16-8x+x^2)+3$$
$$=x^2-32+16x-2x^2+3=-x^2+16x-29=F(x)$$

$F(x)' = (-x^2 + 16x - 29)' = -2x + 16$

$F(x)' = 0 \;\Rightarrow\; -2x + 16 = 0 \;\Rightarrow\; -2x = -16$

$\Rightarrow x = 8 \;\Rightarrow y = 4 - x \;\Rightarrow y = 4 - 8 = -4$

$F(x)'' = (-2x + 16)' = -2 < 0 \;\Rightarrow$ v bode $x = 8$ má funkcia $F(x)$ lokálne maximum, stacionárny bod $A = [8, -4]$

Funkcia $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3$ má <u>viazané lokálne maximum</u> v bode $A = [8, -4]$

Funkčná hodnota: $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 3$, $\quad f(8, -4) = 8^2 - 2\cdot(-4)^2 + 3$ = 64 – 32 + 3 = 35

Príklad 8: Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^2 + y^2 - 5xy + 160$,

ak podmienka väzby je $x + y = 10$.

Riešenie: **<u>Lagrangeova metóda,</u>** vytvoríme pomocnú funkciu (Lagrangeovu)

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 5xy + 160 + \lambda(x + y - 10)$$

Vypočítame parciálne derivácie 1. rádu funkcie $F(x, y)$:

$$F'_x = f'_x(x, y) + \lambda \cdot g'_x(x, y) = 2x - 5y + \lambda$$

$$F'_y = f'_y(x, y) + \lambda \cdot g'_y(x, y) = 2y - 5x + \lambda$$

Stacionárne body a koeficient λ vypočítame zo sústavy rovníc:

$$\begin{array}{lcl} F'_x = 0 & & 2x - 5y + \lambda = 0 \\ F'_y = 0 & \Leftrightarrow & 2y - 5x + \lambda = 0 \\ g(x, y) = 0 & & x + y = 10 \end{array}$$

Z prvej rovnice vyjadríme λ:

$$\lambda = 5y - 2x$$

Dosadíme za λ do druhej rovnice a dostaneme:

$$2y - 5x + 5y - 2x = 0 \quad\Rightarrow\quad 7y - 7x = 0$$

Z tejto rovnice vyjadríme neznámu x:

$$x = y$$

a dosadíme do rovnice väzby:

$$y + y = 10 \quad\Rightarrow\quad 2y = 10 \quad\Rightarrow\quad y = 5$$

Zistili sme stacionárny bod funkcie:

$$y = 5,\quad x = 5 \quad \text{pre} \quad \lambda = 15$$

Vypočítame parciálne derivácie 2. rádu funkcie $F(x, y)$:

$$F''_{xx} = 2,\quad F''_{xy} = -5,\quad F''_{yy} = 2,\quad F''_{yx} = -5$$

Determinant pre stacionárny bod $[5, 5]$ má hodnotu $|D| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 25 = -21 > 0$.

Z toho vyplýva, že funkcia $F(x, y)$ **nemá extrém** v stacionárnom bode $[3, 2]$.

Pre funkciu $f(x, y)$ to znamená, že v bode [3, 2] **nemá viazaný** lokálny extrém.

Viazané extrémy: aplikácia

Bak.praca BRNO 2012 http://is.muni.cz/th/357006/prif_b/BP_Palatinusova.pdf

Príklad 15. Pomocou W jednotiek práce a K jednotiek kapitálu, firma dokáže vyprodukovať P jednotiek výrobku, pričom $P(W,K) = 113W + 15K + 3WK - W^2 - 2K^2$. Náklady na jednotku práce sú 60 €, na jednotku kapitálu 100 €. Firma má na výrobu k dispozícii 7 200 €.

a) Metódou Lagrangeových multiplikátorov určte množstvo jednotiek práce a kapitálu, ktoré by mala firma použiť, aby maximalizovala svoju produkciu.

b) Dokážte, že v tejto maximálnej výške produkcie sa pomer medzného produktu práce a medzného produktu kapitálu rovná pomeru ich jednotkových nákladov.

Riešenie. a) Hľadáme maximum funkcie

$$P(W,K) = 113W + 15K + 3WK - W^2 - 2K^2,$$

viazanej podmienkou

$$g = 60W - 100K - 7200 = 0.$$

Prislúchajúca Lagrangeova funkcia má tvar

$$L(W,K,\lambda) = 113W + 15K + 3WK - W^2 - 2K^2 - \lambda(60W + 100K - 7200).$$

Hľadáme stacionárne body funkcie L

$$L_W = 113 + 3K - 2W - 60\lambda,$$
$$L_K = 15 + 3W - 4K - 100\lambda,$$
$$g = 60W + 100K - 7\,200 = 0.$$

Riešením tejto sústavy rovníc dostávame W=70, K=30 a $\lambda = 1{,}05$. Určíme druhý diferenciál funkcie L

$$\mathrm{d}^2L = -2(\mathrm{d}W)^2 + 6\mathrm{d}K\mathrm{d}W - 4(\mathrm{d}K)^2.$$

Z väzobnej podmienky plynie vzťah

$$60\mathrm{d}W + 100\mathrm{d}K = 0.$$

Dosadením do druhého diferenciálu funkcie L dostávame

$$\mathrm{d}^2L = -2\cdot(-\frac{5}{3}\mathrm{d}K)^2 - 4(\mathrm{d}K)^2 + 6\mathrm{d}K(-\frac{5}{3}\mathrm{d}K) = -\frac{176}{9}(\mathrm{d}K)^2.$$

Vzniknutá kvadratická forma je negatívne definitná. V stacionárnom bode teda nastáva lokálne maximum.

Firma maximalizuje svoju produkciu, ak použije 70 jednotiek práce a 30 jednotiek kapitálu.

Druhý diferenciál sme nepreberali. **Zistenie extrému pomocou determinantu:**

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 < 0$$, záver: **nemá extrém** v bode [W, K] = [70, 30].