

EKONOMICKÉ APLIKÁCIE PARCIÁLNYCH DERIVÁCIÍ PRVÉHO RÁDU FUNKCIE DVOCH REÁLNYCH PREMENNÝCH

Príklad 1.

Podnik vyrába dva druhy osviežujúcich nápojov A a B. Funkcia celkových nákladov pri ich výrobe je daná rovnicou

$$C(x, y) = 1,2x^2 + y^2 - xy + 20x + 80y + 300,$$

kde x je množstvo nápoja A a y je množstvo nápoja B (v hektolitroch). Predpokladajme, že úroveň produkcie je $x_0 = 300 \text{ hl}$, $y_0 = 400 \text{ hl}$.

- Vypočítajme celkové náklady pri danej úrovni produkcie.
- Zistíme, či je výhodnejšie zvyšovať produkciu nápoja A pri zachovaní pôvodnej produkcie nápoja B, alebo je výhodnejšie zvyšovať produkciu nápoja B pri zachovaní pôvodnej produkcie nápoja A.

Riešenie:

- a) Celkové náklady pri danej úrovni produkcie $x_0 = 300 \text{ hl}$, $y_0 = 400 \text{ hl}$ sú

$$C(300, 400) = 1,2 \cdot 300^2 + 400^2 - 300 \cdot 400 + 20 \cdot 300 + 80 \cdot 400 + 300 = 186\,300 \text{ p. j.}$$

- b) Vypočítame parciálne derivácie 1. rádu funkcie $C(x, y)$ a ich hodnotu v bode $[x_0, y_0] = [300, 400]$

$$\frac{\partial C(x, y)}{\partial x} = 2,4 \cdot x - y + 20, \quad \frac{\partial C(300, 400)}{\partial x} = 2,4 \cdot 300 - 400 + 20 = 340$$

$$\frac{\partial C(x, y)}{\partial y} = 2y - x + 80, \quad \frac{\partial C(400, 500)}{\partial y} = 2 \cdot 400 - 300 + 80 = 580$$

Parciálna derivácia funkcie $C(x, y)$ podľa premennej x je v bode $[300, 400]$ kladná, teda parciálna funkcia $C(x, y_0)$ (funkcia premennej x) je v bode $[300, 400]$ rastúca. Celkové náklady rastú z danej úrovne produkcie približne rýchlosťou 340 p.j. (peňažných jednotiek) na každý prírastok 1 hl produkcie nápoja A pri zachovaní pôvodnej produkcie nápoja B.

Parciálna derivácia funkcie $C(x, y)$ podľa premennej y je v bode $[300, 400]$ tiež kladná, teda parciálna funkcia $C(x_0, y)$ (funkcia premennej y) je v bode $[300, 400]$ rastúca. Celkové náklady rastú z danej úrovne produkcie približne rýchlosťou 580 p.j. (peňažných jednotiek) na každý prírastok 1 hl produkcie nápoja B pri zachovaní pôvodnej produkcie nápoja A.

Pri zvyšovaní produkcie nápoja B a zachovaní pôvodnej produkcie nápoja A budú rásť náklady rýchlejšie než pri zvyšovaní produkcie nápoja A a zachovaní pôvodnej produkcie nápoja B. Preto je výhodnejšie zvyšovať produkciu nápoja A pri zachovaní pôvodnej produkcie nápoja B.

EKONOMICKÉ APLIKÁCIE LOKÁLNYCH EXTRÉMOV FUNKCIE DVOCH REÁLNYCH PREMENNÝCH

Príklad 2. Maximalizácia zisku.

Mesačnú produkciu firmy môžeme vyjadriť nasledovnou funkciou:

$$Q = 100 \cdot K - K^2 + 150 \cdot L - 0,5L^2,$$

kde: premenná K znamená výrobný faktor *kapitál*,

premenná L znamená výrobný faktor *práca*.

Firma zamestnáva L pracovníkov za 400 p.j./deň (P_L) a prenajíma si stroje K za 200 p.j./deň a stroj (P_K). Cena P , za ktorú svoj produkt predáva, je 20 p.j./za jednotku. Vypočítajme, akú kombináciu výrobných faktorov L a K by mala firma použiť, aby dosiahla za daných podmienok maximálny zisk (p.j. znamená peňažných jednotiek)

Riešenie:

Zisk je rozdiel medzi tržbami TR a nákladmi TC , t. j. $Z = TR - TC$,

kde: $TR = P \cdot Q = 20 \cdot (100 \cdot K - K^2 + 150 \cdot L - 0,5L^2)$

$$TC = P_K \cdot K + P_L \cdot L = 200 \cdot K + 400 \cdot L$$

Potom funkciu zisku môžeme napísať v tvare:

$$Z = (2000 \cdot K - 20 \cdot K^2 + 3000 \cdot L - 10 \cdot L^2) - (200 \cdot K + 400 \cdot L)$$

Po úprave dostaneme: $Z = 1800 \cdot K - 20 \cdot K^2 + 2600 \cdot L - 10 \cdot L^2$

Máme vypočítať lokálne maximum tejto funkcie.

Funkcia zisku Z dosahuje extrém pre také hodnoty K a L , pre ktoré je splnená nevyhnutná podmienka, že prvá derivácia funkcie podľa každej nezávislej premennej sa rovná nule:

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 0 \Rightarrow 1800 - 40 \cdot K = 0 \Rightarrow K = 45, \quad \frac{\partial Z}{\partial L} = 0 \Rightarrow 2600 - 20 \cdot L = 0 \Rightarrow L = 130$$

Teda stacionárny bod $[K, L] = [45, 130]$.

Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = -40, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Z}{\partial L \partial K} = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = -20$$

Determinant pre stacionárny bod je: $|D| = \begin{vmatrix} -40 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} = 80 - 0 = 80 > 0$,

z toho vyplýva, že funkcia Z má extrém v bode $[45, 130]$.

Pre hodnotu druhej derivácie platí: $\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = -40 < 0$, teda funkcia zisku má lokálne maximum.

Funkčná hodnota (zisk v extréme) je:

$$Z = 1800 \cdot 45 - 20 \cdot (45)^2 + 2600 \cdot 130 - 10 \cdot (130)^2 = 209\,500 \text{ p.j.}$$

Zistili sme, že ak firma použije pre výrobné faktory kombináciu $K = 45$ a $L = 130$, tak dosiahne maximálny zisk.

Matematicky je zisk definovaný vzťahom

$$TP(x) = TR(x) - TC(x),$$

kde $TR(x)$ je funkcia celkových príjmov a $TC(x)$ je funkcia celkových nákladov, a je určený maximálnou hodnotou funkcie $TP(x)$ na danom intervale premennej x .

EKONOMICKÉ APLIKÁCIE LOKÁLNYCH EXTRÉMOV

Príklad 3. Maximalizácia zisku.

Predajca predáva dva druhy výrobkov x a y . Nákupná cena výrobku x je 30 p.j., nákupná cena výrobku y je 25 p.j. za jednotku. Dopyt zákazníkov pri cene výrobku x a výrobku y je daný funkciami $60 - 4x + 3y$ a $70 + 5x - 6y$. Vypočítajme ceny pre obidva výrobky pri maximálnom zisku a veľkosť tohto zisku.

Riešenie:

Zisk je daný vzťahom

$$TP(x, y) = (x - 30)(60 - 4x + 3y) + (y - 25)(70 + 5x - 6y)$$

a po úprave

$$TP(x, y) = -4x^2 - 6y^2 + 55x + 130y + 8xy - 3550$$

Hľadané ceny výrobkov x a y sú určené lokálnymi extrémami danej funkcie celkového zisku $TP(x, y)$.

Parciálne derivácie prvého rádu

$$\frac{\partial TP(x, y)}{\partial x} = -8x + 8y + 55, \quad \frac{\partial TP(x, y)}{\partial y} = -12y + 8x + 130$$

položíme rovné nule a výpočtom dostaneme riešenie sústavy rovníc

$$x = \frac{425}{8} = 53,125 \quad \text{a} \quad y = \frac{185}{4} = 46,25.$$

Bod $M = [53,125, 46,25]$ je stacionárny bod danej funkcie.

Z parciálnych derivácií druhého rádu zistíme, či funkcia má v bode M lokálne maximum:

$$D_M = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 TP(M)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 TP(M)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 TP(M)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 TP(M)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -12 \end{vmatrix} = 96 - 64 = 32 > 0$$

Vidíme, že hodnota determinantu D_M je kladné číslo a zároveň $\frac{\partial^2 TP(M)}{\partial x^2} < 0$, z toho vyplýva, že v daná funkcia má v bode $M = [53,125, 46,25]$ lokálne maximum. Teda pri týchto cenách výrobkov x a y je zisk maximálny.

Dosadením hodnôt $x = 53,125$ a $y = 46,25$ do funkcie $TP(x, y)$ vypočítame veľkosť zisku, $TP(M) = 8014,1875$ p.j./.