Matematika 1A :: Test na skúške (ukážka) :: 2015

1. Daná je funkcia $g: y = 5 + 4\arccos\left(\frac{3x-1}{4}\right)$. **a)** Zistite oblasť definície funkcie, **b)** vyjadrite inverznú funkciu g^{-1}.
2. Zistite rovnice asymptot (so smernicou, bez smernice) grafu funkcie $f: y = \frac{5x^2}{x-4}$ a nájdené asymptoty zobrazte.
3. Pomocou prvej a druhej derivácie vyšetrite monotónnosť, stacionárne body a lokálne extrémy funkcie f : $f: y = \frac{6-3x}{x^2}$
4. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie $f: y = 10x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4$
5. Nájdite stacionárne body a lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^3 - y^3 - 9xy + 5$
6. Lagrangeovou metódou vypočítajte viazané extrémy funkcie $f: z = 2x^2 + y^2 + 5$ pri väzbe $g: 2x + y - 6 = 0$
7. **Aplikačná úloha** - maximalizácia zisku Mesačná produkcia firmy je opísaná nasledovnou funkciou: $Q = 100 \cdot K - K^2 + 150 \cdot L - 0{,}5L^2$, kde: K – výrobný faktor *kapitál*, L – výrobný faktor *práca*. Firma zamestnáva pracovníkov L za 400 p.j./deň (P_L) a prenajíma si stroje K za 200 p.j./deň a stroj (P_K). Cena P, za ktorú svoj produkt predáva, je 20 p.j. za jednotku. Vypočítajme, akú kombináciu výrobných faktorov by mala firma použiť, aby dosiahla za daných podmienok maximálny zisk.
Teória, napr.: a) Načrtnite grafy navzájom inverzných funkcií $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ na príslušných intervaloch. Napíšte $D(f)$, $H(f)$ a vlastnosti funkcie $y = \arcsin x$. b) Napíšte determinant, pomocou ktorého zisťujeme lokálne extrémy funkcie f(x, y)

Ďalšie príklady:

* dotyčnica ku grafu funkcie
* dotyková rovina
* derivácia zloženej funkcie

Príklady a výsledky

1. Daná je funkcia $g: y = 5 + 4\arccos\left(\frac{3x-1}{4}\right)$.

a) Zistite oblasť definície funkcie,
b) Vyjadrite inverznú funkciu g^{-1}.
Riešenie:

a) oblasť definície

$$-1 \le \frac{3x-1}{4} \le 1 \quad / \,.\, 4$$

$$\Rightarrow \quad -4 \le 3x - 1 \le 4 \;/\; +1$$

$$\Rightarrow \quad -3 \le 3x \le 5$$

$$\Rightarrow \quad -1 \le x \le \frac{5}{3} \qquad \Rightarrow \qquad D(g) = <-1, \frac{5}{3}>$$

b) inverzná funkciu k funkcii g

$$g^{-1}: x = 5 + 4\arccos\left(\frac{3y-1}{4}\right) \quad / \; -5$$

$$g^{-1}: x - 5 = 4\arccos\left(\frac{3y-1}{4}\right) \quad / : 4$$

$$g^{-1}: \frac{x-5}{4} = \arccos\left(\frac{3y-1}{4}\right) \quad / \circ \cos()$$

$$g^{-1}: \cos\left(\frac{x-5}{4}\right) = \frac{3y-1}{4} \quad /. \; 4$$

$$g^{-1}: 4\cos\left(\frac{x-5}{4}\right) = 3y - 1 \quad / \; +1$$

$$g^{-1}: \; 1 + 4\cos\frac{x-5}{4} = 3y \quad / : 3$$

$$g^{-1}: \; \frac{1 + 4\cos\frac{x-5}{4}}{3} = y$$

$$g^{-1}: y = \frac{1 + 4\cos\left(\frac{x-5}{4}\right)}{3}$$

2. Zistite rovnice asymptot (so smernicou, bez smernice) grafu funkcie

$f: y = \dfrac{5x^2}{x-4}$ a nájdené asymptoty zobrazte.

Riešenie:

ASS: $y = ax + b$

$$\Rightarrow a = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2}{x-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^2}{x(x-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{x-4} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{1-\frac{4}{x}} = \frac{5}{1-0} = 5$$

$$\Rightarrow b = \lim_{x\to\infty} [\frac{5x^2}{x-4} - 5x] = \lim_{x\to\infty} [\frac{5x^2 - 5x(x-4)}{x-4}] = \lim_{x\to\infty} [\frac{5x^2 - 5x^2 + 20x}{x-4}] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{20x}{x-4} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{20}{1-\frac{4}{x}} = \frac{20}{1-0} = 20$$

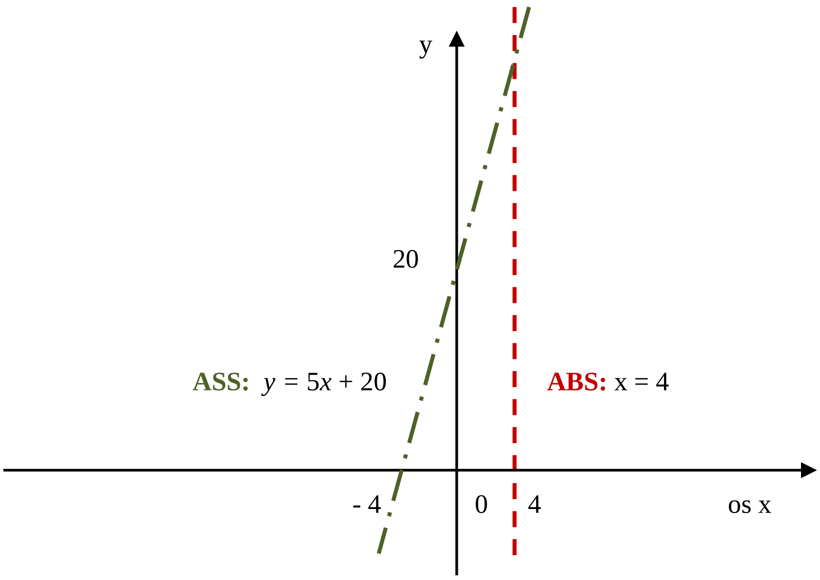
$\Rightarrow$ ASS: $\underline{y = 5x + 20}$	

x	0	−4
y	20	0

ABS: $\underline{x = 4}$, $4 \notin D(f)$ **!**

$x \to 4^+$	$x \to 4^-$
$(4{,}1) \Rightarrow f(x) \doteq \frac{5\cdot 16}{4{,}1-4} = \frac{80}{0{,}1} = 800$	$(3{,}9) \Rightarrow f(x) \doteq \frac{5\cdot 16}{3{,}9-4} = \frac{80}{-0{,}1} = -800$
$(4{,}01) \Rightarrow f(x) \doteq \frac{5\cdot 16}{4{,}01-4} = \frac{80}{0{,}01} = 8000$	$(3{,}99) \Rightarrow f(x) \doteq \frac{5\cdot 16}{3{,}99-4} = \frac{80}{-0{,}01} = -8000$
$(4{,}001) \Rightarrow f(x) \doteq \frac{5\cdot 16}{4{,}001-4} = \frac{80}{0{,}001} = 80000$	$(3{,}999) \Rightarrow f(x) \doteq \frac{5\cdot 16}{3{,}999-4} = \frac{80}{-0{,}001} = -80000$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Obrázok



3. Pr. Monotónnosť a lokálne extrémy $f: y = \dfrac{6-3x}{x^2}$

Riešenie: $D(f) = R - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{-3(x^2)-(6-3x)(2x)}{\left(x^2\right)^2} = \frac{-3x^2-12x+6x^2}{x^4} = \frac{3x^2-12x}{x^4} = \frac{3x(x-4)}{x^4} = \frac{3(x-4)}{x^3}$$

N.B.: x = 0, x = 4, $0 \notin D(f)$ $\Rightarrow$ stacionárny bod : x = 4

x – 4 - 4 ———————— +
x^3 - - - - - - - - - - - - - 0 —————————————————— +

$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
+	–	+
rastúca	klesajúca	rastúca

$$f''(x) = \left(\frac{3x-12}{x^3}\right)' = \frac{(3x-12)'(x^3)-(3x-12)(3x^2)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{3(x^3)-(3x-12)(3x^2)}{x^6} =$$

$$= \frac{3x^3-9x^3+36x^2}{x^6} = \frac{-6x^3+36x^2}{x^6} = \frac{x^2(-6x+36)}{x^6} = \frac{(-6x+36)}{x^4}$$

Stac.bod dosadiť do 2.derivácie: $f''(4) = \dfrac{(-6\cdot 4+36)}{4^4} = \dfrac{-24+36}{16\cdot 16} = \dfrac{12}{256} = \dfrac{3}{64} > 0$

$\Rightarrow$ v bode $x = 4$ má funkcia lok. MINIMUM ,

funkčná hodnota: $f: y = \dfrac{6-3x}{x^2}$ $\Rightarrow$ $f(4) = \dfrac{6-12}{16} = -\dfrac{6}{16} = -\dfrac{3}{8}$, M = [4, $-\dfrac{3}{8}$]

----

4. Pr. Vyšetrite konvexnosť, konkávnosť a nájdite inflexné body funkcie

$f: y = 10x + \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{12}x^4$

Riešenie: $f': y = 10 + \dfrac{2}{3}3x^2 - \dfrac{1}{12}4x^3 = 10 + 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$

$f'': y = 0 + 4x - \dfrac{1}{3}3x^2 = 4x - x^2 = x(4-x)$ $\Rightarrow$ N. Body.: $x = 0$, $x = 4$

x _ _ _ _ 0 ——————————————————
4 – x ———————————— 4 _ _ _ _ _ _ _

$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
–	+	–
konkávna	konvexná	konkávna

+ konvexná

– konkávna

Inflexné body: $f''': y=(4x-x^2)'=4-2x$

$x=0 \Rightarrow f'''(0)=4-2\cdot 0=4\neq 0 \Rightarrow$ inflexný bod $x=0$,

funkčná hodnota $f(0)=0$; $IB_1 = [0, 0]$

$x=4 \Rightarrow f'''(4)=4-2\cdot 4=-4\neq 0 \Rightarrow$ inflexný bod $x=4$,

funkčná hodnota $f(4)=10\cdot 4+\frac{2}{3}4^3-\frac{1}{12}4^4=61\frac{1}{3}=61{,}33$,

$IB_1 = [4; 61{,}33]$

---

5. Príklad: Nájdime lokálne extrémy funkcie $f(x,y)=x^3-y^3-9xy+5$.

***Riešenie*:** parciálne derivácie 1. rádu:

$f'_x=3x^2-9y,\quad f'_y=-3y^2-9x$

Zo sústavy rovníc $f'_x=0,\ f'_y=0$ zistíme stacionárne body :

$$\begin{aligned} 3x^2-9y&=0 \\ -3y^2-9x&=0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x^2-3y&=0 \\ y^2+3x&=0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} y&=\frac{x^2}{3} \\ y^2+3x&=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{3}\right)^2+3x=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^4}{9}+3x=0 \quad /.9 \quad\Rightarrow\quad x^4+27x=0 \quad\Rightarrow\quad x\cdot(x^3+27)=0$$

Z rovnice vyplýva: $x_1=0 \Rightarrow y_1=0$

$x_2=-3 \Rightarrow y_2=3$

Stacionárne body majú súradnice: $M_1=[0,0],\quad M_2=[-3,3]$

Parciálne derivácie 2. rádu

$f''_{xx}=6x$, $f''_{xy}=-9$, $f''_{yy}=-6y$, $f''_{yx}=-9$

Hodnoty parciálnych derivácií druhého rádu v stacionárnych bodoch

$f''_{xx}(M_1)=0$, $f''_{xy}(M_1)=-9$, $f''_{yy}(M_1)=0$, $f''_{yx}(M_1)=-9$

$f''_{xx}(M_2)=-18$, $f''_{xy}(M_2)=-9$, $f''_{yy}(M_1)=-18$, $f''_{yx}(M_1)=-9$

Determinant pre stac. bod $M_1=[0,0]$:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}=-81<0$$

z toho vyplýva, že funkcia f nemá extrém v stacionárnom bode $M_1=[0,0]$.

Determinant pre stac. bod $M_2=[-3,3]$:

$$D=\begin{vmatrix} -18 & -9 \\ -9 & -18 \end{vmatrix}=324-81=243>0.$$

Z toho vyplýva: funkcia f má extrém v stacionárnom bode $M_2 = [-3, 3]$.
Pre hodnotu druhej derivácie platí $f''_{xx}(M_2) = -18 < 0$,
z čoho dostávame : funkcia má v stacionárnom bode $M_2 = [-3, 3]$ lokálne maximum.

Funkčná hodnota : $f(x, y) = x^3 - y^3 - 9xy + 5$
$f(-3, 3) = -27 - 27 + 81 + 5 = -54 + 86 = 32.$

---

6. Lagrangeovou metódou vypočítajte viazané extrémy funkcie $f : z = 2x^2 + y^2 + 5$
pri väzbe $g : 2x + y - 6 = 0$

Riešenie:

$F(x) : z = 2x^2 + y^2 + 5 + \lambda(2x + y - 6)$

$F(x) : z = 2x^2 + y^2 + 5 + \lambda 2x + \lambda y - 6\lambda$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad 4x + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + \lambda = 0 \Rightarrow \quad \lambda = -2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \lambda \quad \Rightarrow \quad 2y + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y - 2x = 0$$

3. rovnica: $\Rightarrow \quad 2x + y - 6 = 0$ sčítame $\Rightarrow \quad 3y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$\Rightarrow \quad x = 2$

$\Rightarrow \quad \lambda = -4$

Stacionárny bod: $A = [2,2]$

$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$ funkcia má viazaný extrém v bode A

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4 > 0 \ \underline{\Rightarrow [2,2]}$ viazané lokálne MINIMUM

Funkčná hodnota: $f(2,2) = 8 + 4 + 5 = 17$

---

7. **<u>Príklad:</u> Maximalizácia zisku (aplikácia na lokálne extrémy funkcie f(x,y)).**

Mesačná produkcia firmy je daná funkciou:

$$Q = 100 \cdot K - K^2 + 150 \cdot L - 0{,}5L^2,$$

premenná K - výrobný faktor *kapitál*,
premenná L - výrobný faktor *práca*.

Firma zamestnáva L pracovníkov za 400 p.j./deň (P_L) a prenajíma si stroje K za 200 p.j./deň a stroj (P_K). Cena P, za ktorú svoj produkt predáva, je 20 p.j./za jednotku. Akú kombináciu výrobných faktorov L a K by mala firma použiť, aby dosiahla za daných podmienok maximálny zisk (p.j. znamená peňažných jednotiek)?

Riešenie:

Zisk je rozdiel medzi tržbami TR a nákladmi TC, t. j. $Z = TR - TC$,
kde: $TR = P \cdot Q = 20 \cdot (100 \cdot K - K^2 + 150 \cdot L - 0{,}5L^2)$

$$TC = P_K \cdot K + P_L \cdot L = 200 \cdot K + 400 \cdot L$$

Teda funkcia zisku má tvar:

$$Z = (2000 \cdot K - 20 \cdot K^2 + 3000 \cdot L - 10 \cdot L^2) - (200 \cdot K + 400 \cdot L)$$

Po úprave :

$$Z = 1800 \cdot K - 20 \cdot K^2 + 2600 \cdot L - 10 \cdot L^2$$

Máme vypočítať lokálne maximum tejto funkcie. Funkcia dosiahne extrém pre také hodnoty *K* a *L*, pre ktoré je splnená podmienka: prvá derivácia funkcie podľa každej nezávisle premennej sa rovná nule.

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = 0 \Rightarrow 1800 - 40 \cdot K = 0 \Rightarrow K = 45$$

$$\frac{\partial Z}{\partial L} = 0 \Rightarrow 2600 - 20 \cdot L = 0 \Rightarrow L = 130$$

Teda stacionárny bod $[K, L] = [45, 130]$.

Parciálne derivácie druhého rádu:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = -40, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Z}{\partial L \partial K} = 0, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial L^2} = -20$$

Determinant pre stacionárny bod je: $|D| = \begin{vmatrix} -40 & 0 \\ 0 & -20 \end{vmatrix} = 80 - 0 = 80 > 0$,

z toho vyplýva, že funkcia *Z* má extrém v bode [45, 130].

Hodnota druhej derivácie: $\frac{\partial^2 Z}{\partial K^2} = -40 < 0$, teda funkcia zisku má lokálne maximum.

Funkčná hodnota (zisk v extréme) je:

$$Z = 1800 \cdot 45 - 20 \cdot (45)^2 + 2600 \cdot 130 - 10 \cdot (130)^2 = \ 209\,500 \text{ p.j.}$$

Zistili sme, že ak firma použije pre výrobné faktory kombináciu

$K = 45$ a $L = 130$, tak dosiahne maximálny zisk.

Ďalšie príklady:

* dotyčnica ku grafu funkcie
* dotyková rovina
* derivácia zloženej funkcie

Pr: monotónnosť a lokálne extrémy

funkcia $f\ :\ y = \frac{x^2+4}{x}$, výsledky: $f'(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$, $f''(x) = \frac{8}{x^3}$

$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
+	–	–	+
rastúca	klesajúca	klesajúca	rastúca

Lok. MAX : $f''(-2)=-1$, $f(-2)=-4$ MAX (-2, -4)

Lok. MIN : $f''(2)=+1$, $f(2)=4$ MIN (2, 4)

x = 0 – nepatrí do D(f)

Príklad: Vypočítajme rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f: z = x^2 + 2y^2 - 5$ v dotykovom bode $T = [2, -1, z_0 = ?]$

Riešenie: Tretia súradnicu dotykového bodu (funkčná hodnota):

$z_0 = f(2,-1) = 2^2 + 2\cdot(-1)^2 - 5 = 4 + 2 - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad T = [2, -1, 1]$

Parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + 2y^2 - 5)'_x = 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + 2y^2 - 5)'_y = = 4y$$

Vypočítame hodnoty parciálnych derivácií v bode $[x_0, y_0] = [2,-1]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 2\cdot 2 = 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 4\cdot(-1) = -4$$

Údaje dosadíme do rovnice dotykovej roviny:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

$z - 1 = 4\cdot(x-2) - 4\cdot(y-(-1))$

$z - 1 = 4x - 8 - 4y - 4$

$z = 4x - 4y - 11$ rovnica dotykovej roviny

Príklad: Zobrazte graf funkcie $f: y = x^2 - 4x - 5$, napíšte D(f), H(f) a vlastnosti

---

Príklad: Daná je funkcia $f: y = 10 + 6x^2 - 2x^3$. Vypočítajte intervaly konvexnosti, konkávnosti a inflexné body funkcie

---

Príklad: Funkcia celkových nákladov má vyjadrenie $CN(x): y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 10$ ($x > 0$). Zistite, pre akú úroveň produkcie x budú celkové náklady minimálne a veľkosť nákladov uveďte.

Príklad 5: Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f v danom bode T:

a) $f: y = x^2 - x$, $T = [3\,;\,?]$ $[T = [3\,;\,6],\ y = 5x - 9]$

b) $f: y = \frac{12}{x^2}$, $T = [-1\,;\,?]$ $[T = [-1\,;\,12],\ y = 24x + 36]$

c) $f: y = \ln x$, $T = [1\,;\,?]$ $[T = [1\,;\,0],\ y = x - 1]$