

7.1. Príklad

Marginálny príjem podniku je daný funkciou $MP(x) = 9,8 - 0,03 \cdot x$ pri produkcii x výrobkov denne, $x \in (0, 400)$.

Marginálne náklady podniku sú: $MN(x) = 2,4 + 0,01 \cdot x$, $x \in (0, 400)$.

Pri úrovni produkcie $x = 80$ jednotiek má podnik zisk 152 p. j.

Zistite funkciu celkových príjmov $CP(x)$, funkciu celkových nákladov $CN(x)$ a funkciu celkového zisku $CZ(x)$.

Riešenie:

Celkové príjmy: $CP(x) = \int MP(x) dx$

$$CP(x) = \int (9,8 - 0,03x) dx = 9,8x - 0,03 \frac{x^2}{2} + c = 9,8x - 0,015x^2 + c$$

Ak podnik vyrobí 0 výrobkov, tak $CP(x) = 0$. Vypočítajme c pre $x = 0$ výrobkov:

$$CP(x) = 9,8 \cdot 0 - 0,015 \cdot 0 + c \Rightarrow 0 = c \Rightarrow \underline{CP(x) = 9,8 \cdot x - 0,015 \cdot x^2}$$

Celkové náklady: $CN(x) = \int MN(x) dx$

$$CN(x) = \int (2,4 + 0,01x) dx = 2,4x + 0,01 \frac{x^2}{2} + c = 2,4x + 0,005x^2 + c$$

Celkový zisk: $CZ(x) = CP(x) - CN(x)$

$$CZ(x) = 9,8 \cdot x - 0,015 \cdot x^2 - (2,4 \cdot x + 0,005x^2 + c)$$

$$CZ(x) = 7,4 \cdot x - 0,02 \cdot x^2 - c$$

$$x = 80 \Rightarrow CZ(80) = 152 \text{ p. j.}$$

$$7,4 \cdot 80 - 0,02 \cdot 80^2 - c = 152$$

$$592 - 128 - c = 152 \Rightarrow c = 592 - 128 - 152 \Rightarrow c = 312$$

Vyjadrenie funkcií:

$$\underline{CN(x) = 2,4x + 0,005x^2 + 312}$$

$$\underline{CZ(x) = 7,4 \cdot x - 0,02 \cdot x^2 - 312}$$

7.2. Príklad

Marginálne náklady podniku sú dané funkciou $MN(x) = 5 + 10x - 6x^2$.

Zistite funkciu celkových nákladov $CN(x)$, ak fixné náklady sú 8.

Riešenie:

Platí: $CN(x) = \int MN(x) dx$

$$CN(x) = \int (5 + 10x - 6x^2) dx = 5x + 10 \frac{x^2}{2} - 6 \frac{x^3}{3} + c = 5x + 5x^2 - 2x^3 + c$$

Zistíme hodnotu konštanty c .

Fixné náklady sú 8, pričom táto hodnota je nezávislá na počte vyprodukovaného tovaru a reprezentuje náklady, keď podnik vyrobí 0 produktov.

Za x dosadíme hodnotu 0 do funkcie $CN(x)$:

$$CN(0) = 5 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 + c \Rightarrow CN(0) = c \Rightarrow CN(0) = c = 8$$

Teda funkcia celkových nákladov $CN(x) = \underline{5x + 5x^2 - 2x^3 + 8}$

Integračná konštanta c vyjadruje fixné náklady.

7.3. Príklad

Marginálne príjmy sú dané funkciou $MP(x) = 8 - 6x$.

Zistite funkciu celkových príjmov $CP(x)$.

Riešenie:

Celkové príjmy: $CP(x) = \int MP(x) dx$

$$CP(x) = \int (8 - 6x) dx = 8x - 6 \frac{x^2}{2} + c = 8x - 3x^2 + c$$

Určitý integrál, 8. téma: geometrické použitie U.I.

Výpočet obsahu rovinného útvaru

8.1. Príklad

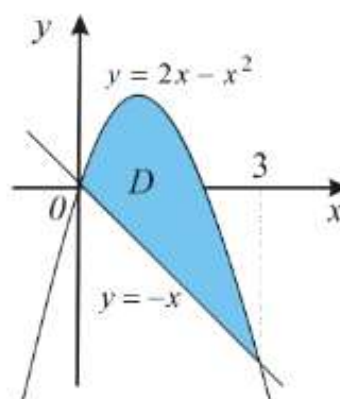
Vypočítajte obsah rovinného útvaru, ktorý je ohraničený parabolou $y = 2x - x^2$ a priamkou $y = -x$.

Riešenie:

Obsah rovinného útvaru D : $S(D) =$

$$= \int_0^3 (2x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2} x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{2}.$$



Zdroj: Anna Grinčová: MATEMATIKA II a jej využitie v ekonómii

8.2. Príklad: Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného funkciami f a g .

➤ Dané funkcie

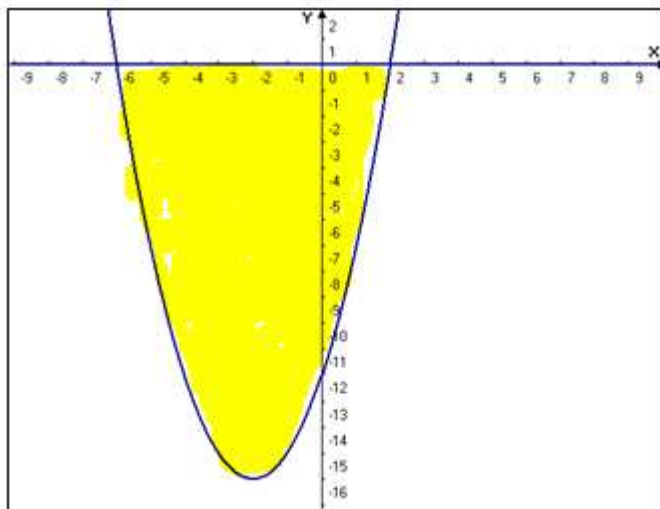
$$\left. \begin{array}{l} f : y = x^2 + 4x - 12 \\ g : y = 0 \end{array} \right\}$$

Priesečníky:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 12 &= (x+6)(x-2) \\ x &= -6, x = 2 \end{aligned}$$

Vrchol paraboly: $V = (-2, -16)$

$$\text{Obsah } S = \int_{-6}^2 0 - (x^2 + 4x - 12) dx = \frac{256}{3} j^2$$



8.3. Príklad: Vypočítajte obsah rovinného útvaru ohraničeného funkciami f a g .

Dané funkcie:

$$\left. \begin{array}{l} f : y = 3 - x \\ g : y = x^2 - 4x + 3 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) \\ x &= 3, x = 1 \end{aligned}$$

Vrchol $V = (2, -1)$

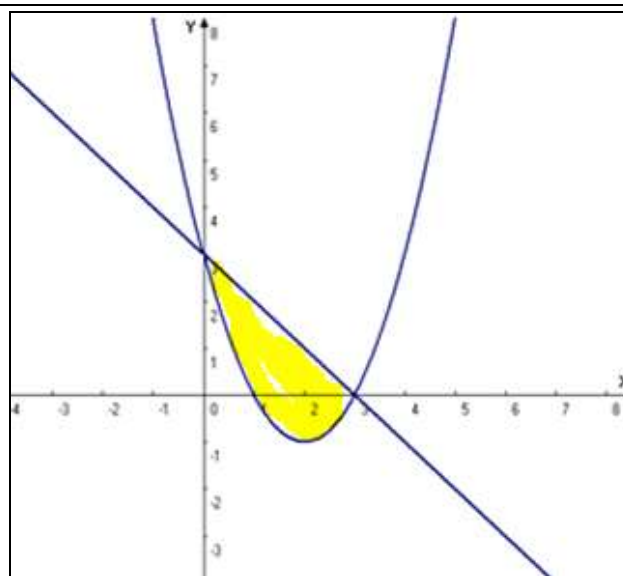
Priesečníky funkcií:

$$x^2 - 4x + 3 = 3 - x$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0, y_1 = 3, P_1 = [0, 3]$$

$$x_2 = 3, y_2 = 0, P_2 = [3, 0]$$



$$\text{Obsah } S = \int_0^3 [3 - x - (x^2 - 4x + 3)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 =$$

$$= \left[3 \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3} \right] - \left[3 \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right] = \left[\frac{27}{2} - \frac{27}{3} \right] = \frac{81 - 54}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} [j^2]$$

Prebytok spotrebiteľa a prebytok výrobcu (ekonomické aplikácie)

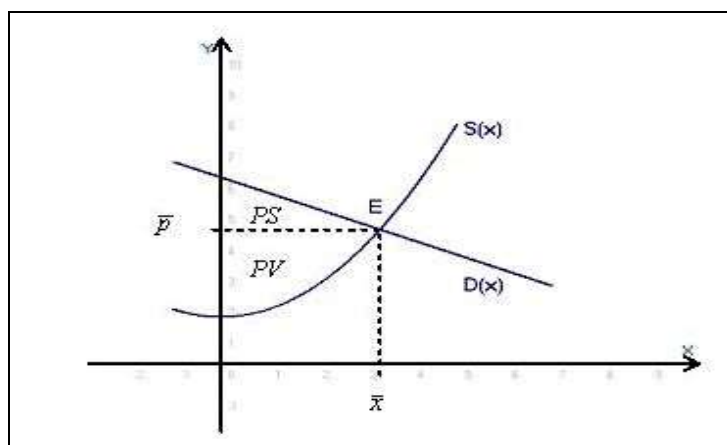
Nech $D(x)$ je funkcia dopytu, $S(x)$ je funkcia ponuky, $\bar{p}$ je rovnovážna cena tovaru a $\bar{x}$ je rovnovážne množstvo tovaru prislúchajúce rovnovážnej cene tovaru. Platí $\bar{x} = D(\bar{p})$, $\bar{x} = S(\bar{p})$.

Potom prebytok spotrebiteľa vypočítame podľa vzťahu

$$PS = \int_0^{\bar{x}} [D(x) - \bar{p}] dx \quad (1)$$

Prebytok výrobcu vypočítame podľa vzťahu

$$PV = \int_0^{\bar{x}} [\bar{p} - S(x)] dx \quad (2)$$



Obr. 1.: Model prebytku spotrebiteľa a prebytku výrobcu

9.1. Pr. Vypočítajte prebytok spotrebiteľa a prebytok výrobcu, ak funkcie dopytu a ponuky majú

vyjadrenie $D(x): p = -\frac{x}{6} + 5$, $S(x): p = \frac{x}{3} + 2$ (grafom sú priamky)

$$E = D(x) \cap S(x): E = [6, 4]$$

$$PS = \int_0^{\bar{x}} [D(x) - \bar{p}] dx = \int_0^6 \left[-\frac{x}{6} + 5 - 4\right] dx = \int_0^6 \left[-\frac{x}{6} + 1\right] dx = \left[-\frac{x^2}{12} + x\right]_0^6 = -\frac{36}{12} + 6 - 0 = 3$$

$$PV = \int_0^{\bar{x}} [\bar{p} - S(x)] dx = \int_0^6 \left[4 - \frac{x}{3} - 2\right] dx = \int_0^6 \left[2 - \frac{x}{3}\right] dx = \left[2x - \frac{x^2}{6}\right]_0^6 = 12 - \frac{36}{6} - 0 = 6$$

