

VEKTORY

Kontrolná otázka 1:

Napíšte vektorovú rovnicu, ktorá vyjadruje vektor $\vec{d}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

Príklad 1. Vyjadriť vektor $\vec{d} = (8, 20, 1)$ ako lineárnu kombináciu vektorov

$$\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (2, 4, 3), \vec{c} = (-3, -7, -2).$$

Riešenie:

Podľa definície máme zistiť, pre aké reálne čísla k_1, k_2, k_3 je splnená vektorová rovnica

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c} = \vec{d}$$

Do tejto rovnice dosadíme vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ so súradnicami

$$k_1 \cdot (1, 2, 1) + k_2 \cdot (2, 4, 3) + k_3 \cdot (-3, -7, -2) = (8, 20, 1)$$

Porovnáme ľavú a pravú stranu rovnice po zložkách a dostaneme sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi k_1, k_2, k_3 :

$$\begin{array}{rrcr} k_1 & + & 2k_2 & - 3k_3 & = & 8 \\ 2k_1 & + & 4k_2 & - 7k_3 & = & 20 \\ k_1 & + & 3k_2 & - 2k_3 & = & 1 \end{array} \quad (S1)$$

Sústavu (S1) budeme riešiť eliminačnou (vylučovacou) metódou. Prvú rovnicu vynásobíme číslom -2 a pričítame k druhej rovnici. Prvú rovnicu vynásobíme číslom -1 a pričítame k tretej rovnici:

$$\begin{array}{rrcr} k_1 & + & 2k_2 & - 3k_3 & = & 8 & /-2/-1 \\ 2k_1 & + & 4k_2 & - 7k_3 & = & 20 & \swarrow \\ k_1 & + & 3k_2 & - 2k_3 & = & 1 & \swarrow \end{array}$$

Upravená ekvivalentná sústava má vyjadrenie:

$$\begin{array}{rrcr} k_1 & + & 2k_2 & - 3k_3 & = & 8 \\ & & & - k_3 & = & 4 \\ & & k_2 & + k_3 & = & -7 \end{array} \quad (S1.u)$$

Z druhej rovnice sústavy (S1.u) vyjadříme neznámu k_3 a dostávame

$$k_3 = -4$$

Vypočítanú hodnotu dosadíme do tretej rovnice sústavy (S1.u) a vypočítame neznámu k_2 :

$$k_2 + (-4) = -7$$

$$k_2 = -3$$

Do prvej rovnice sústavy (S1.u) dosadíme za k_2 a k_3 a vypočítame neznámu k_1 :

$$k_1 + 2 \cdot (-3) - 3 \cdot (-4) = 8$$

$$k_1 = 2$$

Sústava (S1) má práve jedno riešenie: $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, $k_3 = -4$.

Vektor $\vec{d}$ môžeme jednoznačne vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nasledovne: $\vec{d} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c}$.

V nasledujúcich príkladoch budeme zisťovať lineárnu závislosť a lineárnu nezávislosť vektorov.

Kontrolná otázka 2:

Definujte, kedy sú vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ lineárne závislé, resp. lineárne nezávislé.

Príklad 2. Zistíme, či sú dané vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé:

a) $\vec{a}_1 = (2, 1, 2), \vec{a}_2 = (3, -1, 2), \vec{a}_3 = (5, 4, -5),$

b) $\vec{b}_1 = (1, 2, 2), \vec{b}_2 = (3, 4, 3), \vec{b}_3 = (4, 2, -1).$

Riešenie a):

Podľa definície máme zistiť, pre aké $k_1, k_2, k_3 \in R$ je splnená vektorová rovnica

$$k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + k_3 \cdot \vec{a}_3 = (0, 0, 0) \quad (1)$$

Do rovnice (1) dosadíme vektory $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$k_1 \cdot (2, 1, 2) + k_2 \cdot (3, -1, 2) + k_3 \cdot (5, 4, -5) = \vec{0}$$

Porovnáme ľavú a pravú stranu rovnice po zložkách a dostaneme sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi:

$$2k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0$$

$$k_1 - k_2 + 4k_3 = 0$$

$$2k_1 + 2k_2 - 5k_3 = 0$$

Sústavu budeme riešiť eliminačnou metódou. V prvej rovnici necháme neznámu k_1 , v druhej rovnici necháme neznámu k_2 , v tretej rovnici necháme neznámu k_3 .

Prvá úprava: vymeníme 1. a 2. rovnicu v sústave:

$$k_1 - k_2 + 4k_3 = 0 \quad / \cdot (-2) \quad / \cdot (-2)$$

$$2k_1 + 3k_2 + 5k_3 = 0 \quad \swarrow$$

$$2k_1 + 2k_2 - 5k_3 = 0 \quad \swarrow$$

V prvej rovnici necháme neznámu k_1 (použijeme vyššie naznačené úpravy):

$$\begin{array}{rrrrr} k_1 & - & k_2 & + & 4k_3 & = & 0 \\ 0 & + & 5k_2 & - & 3k_3 & = & 0 & / \cdot (-4) \\ 0 & + & 4k_2 & - & 13k_3 & = & 0 & / \cdot 5 \quad \swarrow \end{array}$$

V druhej rovnici necháme neznámu k_2 (použijeme vyššie naznačené úpravy):

$$\begin{array}{rrrrr} k_1 & - & k_2 & + & 4k_3 & = & 0 \\ & & 5k_2 & - & 3k_3 & = & 0 \\ & & 0 & - & 53k_3 & = & 0 \end{array}$$

V tretej rovnici zostala neznáma k_3 , ktorú môžeme vyjadriť :

$$53k_3 = 0 \quad / : 53$$

$$k_3 = 0$$

$\Rightarrow$ z druhej rovnice vyjadríme k_2 :

$$5k_2 - 3k_3 = 0$$

$$5k_2 - 3 \cdot 0 = 0$$

$$k_2 = 0$$

$\Rightarrow$ z prvej rovnice vyjadríme k_1 :

$$k_1 - 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$k_1 = 0$$

Zistili sme, že sústava rovníc má **práve jedno riešenie**, teda vektorová rovnica (1) je splnená len pre $k_1 = k_2 = k_3 = 0$.

Podľa definície sú vektory $\vec{a}_1 = (2, 1, 2)$, $\vec{a}_2 = (3, -1, 2)$, $\vec{a}_3 = (5, 4, -5)$ lineárne nezávislé.

Riešenie b):

V riešení úlohy budeme postupovať ako v predchádzajúcej časti, t.j. máme zistiť, pre aké koeficienty $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ je splnená vektorová rovnica

$$k_1 \cdot \vec{b}_1 + k_2 \cdot \vec{b}_2 + k_3 \cdot \vec{b}_3 = \vec{0} \quad (2)$$

Dosadíme vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ do rovnice (2)

$$k_1 \cdot (1, 2, 2) + k_2 \cdot (3, 4, 3) + k_3 \cdot (4, 2, -1) = (0, 0, 0)$$

Porovnáme ľavú a pravú stranu rovnice po zložkách a dostaneme sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi k_1, k_2, k_3 , ktorú budeme riešiť eliminačnou metódou, úpravy sú označené na pravej strane sústavy:

$$\begin{array}{rclcl}
 k_1 & + & 3k_2 & + & 4k_3 & = & 0 & / \cdot (-2) / \cdot (-2) \\
 2k_1 & + & 4k_2 & + & 2k_3 & = & 0 & \swarrow \\
 2k_1 & + & 3k_2 & - & k_3 & = & 0 & \swarrow
 \end{array} \quad (S2)$$

$$\begin{array}{rclcl}
 k_1 & + & 3k_2 & + & 4k_3 & = & 0 \\
 & - & 2k_2 & - & 6k_3 & = & 0 & / \cdot (-\frac{1}{2}) \\
 & - & 3k_2 & - & 9k_3 & = & 0 & / \cdot (-\frac{1}{3})
 \end{array} \quad (S2.1)$$

$$\begin{array}{rclcl}
 k_1 & + & 3k_2 & + & 4k_3 & = & 0 \\
 & & k_2 & + & 3k_3 & = & 0 & / \cdot (-1) \\
 & & k_2 & + & 3k_3 & = & 0 & \swarrow
 \end{array} \quad (S2.2)$$

$$\begin{array}{rclcl}
 k_1 & + & 3k_2 & + & 4k_3 & = & 0 \\
 & & k_2 & + & 3k_3 & = & 0 \\
 & & & & 0 & = & 0
 \end{array} \quad (S2.3)$$

Tretia rovnica sústavy (S2.3) má vlastne tvar

$$0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 + 0 \cdot k_3 = 0,$$

teda je splnená pre ľubovoľné reálne čísla k_1, k_2, k_3 . Z troch rovníc sústavy (S2) zostali po úpravách dve rovnice, z ktorých máme vyjadriť neznáme k_1, k_2, k_3 .

Ak zvolíme $k_3 = 1$, tak k_1 a k_2 vypočítame zo sústavy

$$\begin{array}{rcl}
 k_1 & + & 3k_2 & + & 4 \cdot 1 & = & 0 \\
 & & k_2 & + & 3 \cdot 1 & = & 0
 \end{array}$$

tak, že z druhej rovnice vyjadríme neznámu k_2 : $k_2 = -3$,

z prvej rovnice vyjadríme neznámu k_1

$$k_1 = -3k_2 - 4 \Rightarrow k_1 = -3 \cdot (-3) - 4 \Rightarrow k_1 = 5$$

Vypočítali sme nenulovú trojicu reálnych čísel $[k_1, k_2, k_3] = [5, -3, 1]$, ktorá je riešením sústavy (S2) a zároveň aj vektorovej rovnice (2). Teda podľa definície sú vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ lineárne závislé.

Poznamenajme, že vektorová rovnica (2) má **nekonečne veľa riešení**, ktoré vieme všeobecne vyjadriť zo sústavy (S2.3) napríklad takto:

z 2. rovnice vyjadríme $k_2 = -3k_3$

a dosadíme do 1. rovnice $k_1 + 3k_2 + 4k_3 = 0$,

z ktorej vyjadríme k_1 : $k_1 + 3(-3k_3) + 4k_3 = 0$

$$k_1 - 5k_3 = 0$$

$$k_1 = 5k_3$$

Množina všetkých riešení sústavy lineárnych rovníc (S2) je množina usporiadaných trojíc

$P = \{[5k_3, -3k_3, k_3], k_3 \in R\}$. Ak za k_3 zvolíme ľubovoľné reálne číslo, tak vieme vypočítať k_1, k_2 tak, aby usporiadaná trojica reálnych čísel $[k_1, k_2, k_3]$ bola riešením vektorovej rovnice (2).

Kontrolná otázka 3: Bázu n -rozmerného vektorového priestoru tvorí n lineárne nezávislých vektorov alebo n lineárne závislých vektorov ?

Domáca úloha z cvičení (pozri nižšie uvedené cvičenia)

Pr. 1, pr. 2c, pr. 3c, pr. 4, pr. 5 c, pr. 6a, pr. 7b.

Cvičenia

1. Pre dané vektory $\vec{a} = (1, -1, 2, 5)$, $\vec{b} = (-2, 0, 3, 4)$ vypočítajte súčet $\vec{a} + \vec{b}$, rozdiel $\vec{a} - \vec{b}$, súčin čísla a vektora $-4 \cdot \vec{b}$, vektor $\vec{d} = 2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b}$ a skalárny súčin $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\begin{aligned} [\vec{a} + \vec{b} &= (-1, -1, 5, 9), \quad \vec{a} - \vec{b} = (3, -1, -1, 1), \\ -4 \cdot \vec{b} &= (8, 0, -12, -16), \quad \vec{d} = (8, -2, -5, -2), \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 24] \end{aligned}$$

2. Vypočítajte skalárny súčin daných vektorov:

- a) $\vec{u} = (2, -2, -3)$, $\vec{v} = (7, 0, -9)$,
 b) $\vec{a} = (-3, 0, 5, -2)$, $\vec{b} = (1, -4, 1, -4)$,
 c) $\vec{c} = (-1, 0, 10, 4)$, $\vec{d} = (-2, 3, -20, 5)$.

$$[a) \vec{u} \cdot \vec{v} = 41, \quad b) \vec{a} \cdot \vec{b} = 10, \quad c) \vec{c} \cdot \vec{d} = -178]$$

3. Vyjadrite vektor $\vec{d}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

- a) $\vec{d} = (2, 13, -7)$, $\vec{a} = (1, 3, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (-1, -4, 0)$ $[\vec{d} = -2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}]$
 b) $\vec{d} = (-1, -11, -17)$, $\vec{a} = (-3, -8, -6)$, $\vec{b} = (1, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 1, -1)$ $[\vec{d} = 2\vec{a} + 5\vec{c}]$
 c) $\vec{d} = (-2, -4, 5)$, $\vec{a} = (1, 3, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 5, 6)$ $[\vec{d} = -5\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{c}]$
 d) $\vec{d} = (4, 5, 2)$, $\vec{a} = (2, 1, 1)$, $\vec{b} = (3, 3, 0)$, $\vec{c} = (-1, 2, -3)$

[príslušná sústava rovníc nemá riešenie, vektor $\vec{d}$ nie je možné vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$]

e) $\vec{d} = (2, 3, 5)$, $\vec{a} = (1, 3, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $\vec{c} = (-1, -4, -5)$

[príslušná sústava rovníc má nekonečne veľa riešení,

$$\vec{d} = (2 + k_3)\vec{a} + (-3 + k_3)\vec{b} + k_3\vec{c}, k_3 \in \mathbb{R}]$$

4. Vyjadrite vektor $\vec{d} = (7, -12, 2)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a} = (1, 3, -1)$,

$\vec{b} = (2, -5, 1)$, $\vec{c} = (0, 3, 4)$. [$\vec{d} = 1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$]

5. Vyjadrite vektor $\vec{b}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$:

a) $\vec{b} = (1, 2, 4, -2)$, $\vec{a}_1 = (2, 4, 8, 2)$, $\vec{a}_2 = (-4, -4, -6, 4)$, $\vec{a}_3 = (2, 3, 5, 1)$, $\vec{a}_4 = (-1, -1, -3, 1)$

$$[\vec{b} = 2\vec{a}_1 - \vec{a}_2 - 3\vec{a}_3 + \vec{a}_4]$$

b) $\vec{b} = (2, 2, 0, 1)$, $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 3)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (1, -5, 1, -3)$, $\vec{a}_4 = (1, 4, -1, 1)$

$$[\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \frac{1}{2}\vec{a}_3 + \vec{a}_4]$$

c) $\vec{b} = (8, -6, 5, -9)$, $\vec{a}_1 = (1, -1, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (4, -3, 6, 1)$, $\vec{a}_3 = (-2, 5, -9, -9)$, $\vec{a}_4 = (1, -2, 6, 7)$

$$[\vec{b} = \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 - 1 \cdot \vec{a}_3 - 3 \cdot \vec{a}_4]$$

d) $\vec{b} = (-5, 0, -18, -5)$, $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 3)$, $\vec{a}_2 = (-2, -3, 0, -4)$, $\vec{a}_3 = (3, 3, 4, 6)$,

$\vec{a}_4 = (4, 10, -9, 12)$

$$[\vec{b} = \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 - 2 \cdot \vec{a}_3 + \vec{a}_4]$$

6. Zistite, či sú dané vektory lineárne nezávislé :

a) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, -5, 1)$

b) $\vec{a}_1 = (3, 6, 9)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, -1)$, $\vec{a}_3 = (0, 2, 3)$

c) $\vec{a} = (1, 3, 7, 2)$, $\vec{b} = (0, -2, 3, 2)$, $\vec{c} = (0, 0, 5, 4)$, $\vec{d} = (1, 2, -1, 2)$

7. Zistite, či sú dané vektory lineárne závislé alebo lineárne nezávislé :

a) $\vec{a}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 4, 4)$, $\vec{a}_3 = (-1, 2, -2)$

[nezávislé]

b) $\vec{b}_1 = (7, 2, -5)$, $\vec{b}_2 = (-1, 1, 2)$, $\vec{b}_3 = (8, 3, -5)$

[závislé]

c) $\vec{c}_1 = (1, 2, -7)$, $\vec{c}_2 = (1, 1, -2)$, $\vec{c}_3 = (8, 3, -5)$, $\vec{c}_4 = (2, 6, 0)$

[závislé]

d) $\vec{d}_1 = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{d}_2 = (2, 1, -1, 3)$, $\vec{d}_3 = (0, -1, 2, 2)$, $\vec{d}_4 = (2, 3, 2, 3)$

[nezávislé]

e) $\vec{a} = (2, 2, 2, 0)$, $\vec{a} = (2, 3, 1, -1)$, $\vec{c} = (1, -1, 3, 0)$, $\vec{d} = (3, 4, 2, -1)$

[závislé]

8. Zistite, či dané vektory $\vec{a}_i, i = 1, 2, \dots, n$, tvoria bázu príslušného vektorového priestoru V_n :

a) $n = 2$, $\vec{a}_1 = (3, -5)$, $\vec{a}_2 = (11, 1)$

[vektory sú nezávislé, tvoria bázu]

b) $n = 3$, $\vec{a}_1 = (1, 2, -5)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 3)$, $\vec{a}_3 = (4, 3, 2)$

[vektory sú nezávislé, tvoria bázu]

c) $n = 3$, $\vec{a}_1 = (2, 4, 6)$, $\vec{a}_2 = (8, 10, 12)$, $\vec{a}_3 = (-2, -2, -2)$

[vektory sú závislé, netvoria bázu]

d) $n = 4$, $\vec{a}_1 = (7, 1, 6, -2)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2, -1)$, $\vec{a}_3 = (1, 4, 6, -3)$, $\vec{a}_4 = (9, 2, 9, -5)$

[LN, tvoria bázu]