Kapitola: Matice

Základné typy matíc

Nech m, n sú prirodzené čísla.
Obdĺžnikovou maticou nazývame maticu typu $m \cdot n$, pre ktorú platí $m \neq n$.
Štvorcovou maticou n-tého stupňa nazývame maticu typu $m \cdot n$, pre ktorú platí $m = n$.
Riadkovou maticou nazývame maticu $(a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n})$ typu $1 \cdot n$.
Stĺpcovou maticou nazývame maticu typu $m \cdot 1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

obdĺžniková matica typu $2 \cdot 3$ — štvorcová matica 3. stupňa — riadková matica typu $1 \cdot 4$ — stĺpcová matica typu $3 \cdot 1$

Diagonálnou maticou n-tého stupňa nazývame štvorcovú maticu, ktorej všetky prvky pod a nad hlavnou diagonálou sa rovnajú nule. Prvky a_{ii}, $i = 1, 2, \dots, n$ tvoria **hlavnú diagonálu** matice.

Jednotkovou maticou n-tého stupňa nazývame diagonálnu maticu, ktorej všetky prvky hlavnej diagonály sa rovnajú číslu 1. **Označenie: $\boldsymbol{E}$ alebo $\boldsymbol{E}_n$.**

Nulovou maticou nazývame maticu, ktorej všetky prvky sa rovnajú nule.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonálna matica — jednotková matica — jednotková matica — nulová matica

Hornou (dolnou) trojuholníkovou maticou nazývame štvorcovú maticu, ktorej všetky prvky pod (nad) hlavnou diagonálou sa rovnajú nule.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

horná trojuholníková matica — dolná trojuholníková matica — matice v redukovanom trojuholníkovom tvare

Vedúcim prvkom riadku matice nazývame jej prvý nenulový prvok. Ak sú všetky prvky v riadku rovné 0, tak riadok nemá vedúci prvok. **Transponovanou maticou k matici $\boldsymbol{A}$** nazývame maticu $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ typu $n \cdot m$, ktorú získame tak, že v matici $\boldsymbol{A}$ typu $m \cdot n$ zameníme navzájom riadky za stĺpce.

Rovnosť matíc. Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ sa rovnajú práve vtedy, keď sú rovnakého typu $m \cdot n$ a platí $a_{ik} = b_{ik}$ pre $i = 1, 2, \dots, m$, $k = 1, 2, \dots, n$. Označenie: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

Operácie s maticami

<u>**Definícia.**</u> **Súčtom matíc** $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ik})$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{ik})$ rovnakého typu $m \cdot n$ nazývame maticu $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ik})$ typu $m \cdot n$ s prvkami $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Označenie: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$

Definícia. **Súčinom reálneho čísla k a matice $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$** typu $m \cdot n$ nazývame maticu $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_{ij})$ typu $m \cdot n$ s prvkami $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m,\ \ j = 1, 2, \dots, n$. Označenie: $\boldsymbol{C} = k \cdot \boldsymbol{A}$

Definícia. **Súčinom** matice $\boldsymbol{A} = (a_{ik})$ typu $m \cdot r$ s maticou $\boldsymbol{B} = (b_{ik})$ typu $r \cdot n$ je matica $\boldsymbol{C} = (c_{ik})$ typu $m \cdot n$ s prvkami

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ir}b_{rn} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk}\ , \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad .$$

Označenie: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

matica $\boldsymbol{A}$ typu $m \cdot r$ matica $\boldsymbol{B}$ typu $r \cdot n$ matica $\boldsymbol{C}$ typu $m \cdot n$

$$i\text{-tý riadok} \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1r} \\ \hdashline \boldsymbol{a}_{i1} & \boldsymbol{a}_{i2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{ir} \\ \hdashline \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_{11} & \cdots & \boldsymbol{b}_{1k} & \cdots & \boldsymbol{b}_{1n} \\ \boldsymbol{b}_{21} & \cdots & \boldsymbol{b}_{2k} & \cdots & \boldsymbol{b}_{2n} \\ \hdashline \boldsymbol{b}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{b}_{rk} & \cdots & \boldsymbol{b}_{rn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{11} & \cdots & \boldsymbol{c}_{1k} & \cdots & \boldsymbol{c}_{1n} \\ \hdashline \boldsymbol{c}_{i1} & \cdots & \boldsymbol{c}_{ik} & \cdots & \boldsymbol{c}_{in} \\ \hdashline \boldsymbol{c}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{c}_{mk} & \cdots & \boldsymbol{c}_{mn} \end{pmatrix}$$

k-tý stĺpec

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ir}b_{rn}$ "vynásobili sme" i-tý riadok matice $\boldsymbol{A}$ k-tým stĺpcom matice $\boldsymbol{B}$

Príklad. Dané sú matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Vypočítajme matice: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D} = 2\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{M} = -3\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X} = 4\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{B}$.

Riešenie:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 10 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -30 \\ -6 & 15 \\ -18 & 3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 2 & -10 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 20 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & -50 \\ -10 & 25 \\ -30 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -54 \\ -10 & 45 \\ -42 & 21 \end{pmatrix}$$

Príklad. Dané sú matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Vypočítajme pre dané matice súčiny: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

Riešenie: **str. 21**

$$\underset{}{\boldsymbol{C}} = \underset{3\cdot 2}{\boldsymbol{A}} \cdot \underset{2\cdot 2}{\boldsymbol{B}}$$ – matica $\boldsymbol{C}$ existuje (počet stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná počtu riadkov matice $\boldsymbol{B}$)

(typ matice $\boldsymbol{A}$ je $3\cdot 2$, typ matice $\boldsymbol{B}$ je $2\cdot 2$)

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 - 1\cdot 4, & 3\cdot(-3) - 1\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 4, & 2\cdot(-3) + 0\cdot 1 \\ -4\cdot 2 + 7\cdot 4 & -4\cdot 4 + 7\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 4 & -6 \\ 20 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \underset{2\cdot 2}{\boldsymbol{B}} \cdot \underset{3\cdot 2}{\boldsymbol{A}}$$ – matica $\boldsymbol{D}$ neexistuje (počet stĺpcov matice $\boldsymbol{B}$ sa nerovná počtu riadkov matice $\boldsymbol{A}$, $2 \neq 3$)

(typ matice)

Hodnosť matice

Definícia. *Riadková hodnosť matice* $\boldsymbol{A}$ typu $m\cdot n$ je nezáporné číslo $h_r(\boldsymbol{A})$, ktoré určuje maximálny počet lineárne nezávislých riadkov matice $\boldsymbol{A}$. *Stĺpcová hodnosť matice* $\boldsymbol{A}$ typu $m\cdot n$ je nezáporné číslo $h_s(\boldsymbol{A})$, ktoré určuje maximálny počet nezávislých stĺpcov matice $\boldsymbol{A}$.

Pri zisťovaní hodnosti matice $\boldsymbol{A}$ stačí určiť buď riadkovú alebo stĺpcovú hodnosť matice, pretože platí nasledujúca veta.

Veta. Riadková hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa rovná stĺpcovej hodnosti matice $\boldsymbol{A}$, t.j. $h_r(\boldsymbol{A}) = h_s(\boldsymbol{A})$.

Nasledujúca veta hovorí o úpravách matice $\boldsymbol{A}$, ktoré nazývame *elementárne úpravy matice* $\boldsymbol{A}$, alebo niekedy aj *ekvivalentné úpravy matice* $\boldsymbol{A}$. Budeme ich v úlohách používať.

Veta. Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ sa nezmení, ak:
1) vymeníme poradie jej riadkov (stĺpcov),
2) vynásobíme niektorý jej riadok (stĺpec) nenulovým číslom,
3) pripočítame k niektorému riadku (stĺpcu) matice $\boldsymbol{A}$ násobok iného riadku (stĺpca) matice $\boldsymbol{A}$,
4) vynecháme riadok (stĺpec) v matici $\boldsymbol{A}$, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov (stĺpcov) matice $\boldsymbol{A}$,
5) pridáme riadok (stĺpec) v matici $\boldsymbol{A}$, ktorý je lineárnou kombináciou ostatných riadkov (stĺpcov) matice $\boldsymbol{A}$.

Uvedená veta hovorí o tom, že z matice $\boldsymbol{A}$ po ekvivalentnej úprave dostaneme maticu $\boldsymbol{B}$ a pre ich hodnosť platí $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Poznámka. Matica $\boldsymbol{A}$ je *ekvivalentná* s maticou $\boldsymbol{B}$, ak pomocou konečného počtu elementárnych úprav dostaneme z matice $\boldsymbol{A}$ maticu $\boldsymbol{B}$. Ekvivalenciu matíc $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ budeme zapisovať $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

Hodnosť matice $\boldsymbol{A}$ vypočítame tak, že ju upravíme na *trojuholníkový tvar*; to znamená: maticu upravujeme pomocou elementárnych úprav tak, aby vedúce prvky v riadkoch boli nenulové a všetky prvky pod nenulovými vedúcimi prvkami boli nulové. Potom sa hodnosť matice v trojuholníkovom tvare rovná počtu jej nenulových riadkov. Maticu upravíme na trojuholníkový tvar pomocou *Gaussovho algoritmu.*

Príklad. Zistime hodnosti daných matíc: **str. 22**

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Riešenie:

Na výpočet hodnosti matíc ***A***, ***B*** použijeme Gaussov algoritmus.

a) Upravujme maticu ***A***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2)\ /\cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & -12 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matica v trojuholníkovom tvare má tri nenulové riadky, jej hodnosť je 3, a teda aj pre hodnosť ekvivalentnej matice ***A*** platí $h(\boldsymbol{A}) = 3$.

b) Upravujme teraz maticu ***B***.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-2)\ /\cdot(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 10 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-5)\ /\cdot(-4) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /\cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \end{pmatrix}.$$

Pre hodnosť matice ***B*** platí $h(\boldsymbol{B}) = 3$.

Inverzná matica

V tejto časti sa budeme zaoberať len štvorcovými maticami.

Definícia. Štvorcová matica ***A*** stupňa n sa nazýva *regulárna*, ak $h(\boldsymbol{A}) = n$.
Ak $h(\boldsymbol{A}) < n$, tak maticu ***A*** nazývame *singulárna matica*.

Definícia. Nech $\boldsymbol{A}$ je regulárna matica stupňa n. *Inverznou maticou* k matici $\boldsymbol{A}$ nazývame štvorcovú maticu $\boldsymbol{A}^{-1}$ stupňa n, pre ktorú platí

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_n\ .$$

Zovšeobecnený postup výpočtu uvádza nasledujúca veta.

Veta. Inverznú maticu k matici $\boldsymbol{A}$ dostaneme tými istými riadkovými ekvivalentnými úpravami z jednotkovej matice, ktorými dostaneme z matice $\boldsymbol{A}$ jednotkovú maticu.

Príklad. Vypočítajme inverzné matice k maticiam

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&8&6\\2&7&3\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\3&2&1&1\\4&3&2&1\\5&4&3&2\end{pmatrix}\ ,\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&5&9\\1&3&5\end{pmatrix}\ .$$

Riešenie.
a) Najprv vypočítame inverznú maticu k matici $\boldsymbol{A}$.
Napíšeme si vedľa seba matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{E}_3$ a súčasne ich upravíme pomocou elementárnych úprav tak, aby sme z matice $\boldsymbol{A}$ dostali jednotkovú maticu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\3&8&6&0&1&0\\2&7&3&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot(-3)/\cdot(-2)\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&1&0&0\\0&-1&0&-3&1&0\\0&1&-1&-2&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ /\cdot(3)/\cdot(1)\\ \\ \end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-8&3&0\\0&1&0&3&-1&0\\0&0&-1&-5&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ /\cdot(2)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-18&5&2\\0&1&0&3&-1&0\\0&0&1&5&-1&-1\end{array}\right)$$

Inverzná matica k matici $\boldsymbol{A}$ je:

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-18&5&2\\3&-1&0\\5&-1&-1\end{pmatrix}$$

Presvedčte sa, že pre súčin platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{E}_3$.

b) Obdobný postup použijeme na výpočet inverznej matice k matici $\boldsymbol{B}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&1&1&1&1&0&0&0\\3&2&1&1&0&1&0&0\\4&3&2&1&0&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot(-1)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&0&0&-1&1&0&0\\4&3&2&1&0&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&-1&1&0&0\\2&1&1&1&1&0&0&0\\4&3&2&1&0&0&1&0\\5&4&3&2&0&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}/\cdot(-2)/\cdot(-4)/\cdot(-5)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&0&0&-1&1&0&0\\0&-1&1&1&3&-2&0&0\\0&-1&2&1&4&-4&1&0\\0&-1&3&2&5&-5&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ /\cdot(1)/\cdot(-1)\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-1)/\cdot(1)/\cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-1)\cdot(1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Inverzná matica k matici $\boldsymbol{B}$ je:

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Opäť sa presvedčte sa, že platí $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}_4$.

Počas výpočtu inverznej matice zároveň zisťujeme, či je daná matica regulárna.
Matica $\boldsymbol{A}$ je regulárna, pre jej hodnosť platí $h(\boldsymbol{A}) = 3$.
Matica $\boldsymbol{B}$ je regulárna, platí $h(\boldsymbol{B}) = 4$.

c) Vypočítajme teraz inverznú maticu k matici $\boldsymbol{C}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-2)/\cdot(-1) \quad \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Matica $\boldsymbol{C}$ nie je regulárna (vyšiel nám nulový riadok pred čiarou), pre hodnosť platí $h(\boldsymbol{C}) = 2$, inverzná matica k matici $\boldsymbol{C}$ neexistuje.

<u>Úlohy:</u>

1. Dané sú matice:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte : a) $A + 2B$, b) $3A - 2C$, c) $2A + B - 3C$

$$\left[a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -4 & -11 & 4 \\ 7 & 13 & -3 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ -4 & -11 & 6 \\ 3 & 19 & -7 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 4 & 12 \\ -2 & -7 & 11 \\ -1 & 14 & -9 \end{pmatrix} \right]$$

2. Vypočítajte súčiny $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, ak matice majú prvky

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad \left[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ -8 & -6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right]$$

3. Vypočítajte súčiny $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$, ak matice majú prvky

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 3\\ -1 & -5 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\qquad \left[\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -1 & -8\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}-22 & -26 & -12\\ 4 & -1 & 3\\ 19 & 32 & 9\end{pmatrix}\right]$$

4. Vypočítajte súčin $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, ak sú dané matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 0 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}\qquad \left[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}15\\ 33\end{pmatrix}\right]$$

5. Vypočítajte súčiny $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ pre dané matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 8 & 4\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}22 & 3 & 21\\ 8 & 20 & -2\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 16\\ 3 & 15 & -1\\ 9 & 7 & 23\end{pmatrix}\right]$$

6. Zistite hodnosti matíc

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 6 & -3 & 10\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

[$h(\boldsymbol{A})=2$, $h(\boldsymbol{B})=2$, $h(\boldsymbol{C})=3$]

7. Zistite hodnosti matíc

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 8 & 6\\ 5 & 15 & 11\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 10 & 15\\ 5 & 22 & 23\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7 & 6\\ 3 & 6 & 2 & 3\\ -2 & 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

[$h(\boldsymbol{A})=2$, $h(\boldsymbol{B})=2$, $h(\boldsymbol{C})=3$]

8. Zistite hodnosti matíc

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 4 & 6 & 3 & 7\\ 3 & 6 & 2 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 0 & -6\\ 1 & -5 & 1 & 12\\ 3 & -1 & 1 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 4 & 7\\ 1 & 1 & -2 & 10\\ 4 & -11 & 20 & -2\end{pmatrix}$$

[$h(\boldsymbol{A})=4$, $h(\boldsymbol{B})=3$, $h(\boldsymbol{C})=4$]

9. Vypočítajte inverzné matice k maticiam

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & 8 & 6\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 7 & 3\end{pmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ -2 & -4 & 9\\ 3 & 13 & -18\end{pmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -18 & 2\\ -1 & 3 & 0\\ -1 & 5 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{D}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{45}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{7}{2}\\ \frac{9}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2}\\ 7 & 2 & -1\end{pmatrix}\right]$$

10. Vypočítajte inverzné matice k maticiam

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -4 & -5 & -6\\ -3 & -3 & -4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2 & 5 & 9\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 7 & 14\end{pmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -3 & 0 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 3\\ -6 & -7 & 10\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 7 & -2\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\right]$$

Determinanty

Cvičenie. Vypočítajte dané determinanty 2. stupňa:

a) $|D|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 6 & 8\end{vmatrix}$ b) $|D|=\begin{vmatrix}-4 & 8\\ 2 & -4\end{vmatrix}$ c) $|D|=\begin{vmatrix}10 & -2\\ -11 & 0\end{vmatrix}$

[výsledky: a) [34], b) [0] , c) [– 22]]

Príklad: Vypočítajme determinant 3. stupňa $|D|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}$

Riešenie: pomocou Sarrusovho pravidla

$$|D|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=$$
$$\begin{matrix}2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 6\end{matrix}$$

= 2.1.2 + 0.(-3).4 + 2.(-3).6 – (4.1.2 + 6.(-3).2 + 2.(-3).0) = 4 – 0 – 36 – 8 + 36 – 0 = – 4

Úlohy: Vypočítajte dané determinanty 3. stupňa:

a) $|D|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ b) $|D|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 8 & 9\end{vmatrix}$ c) $|D|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1\\ 6 & 4 & 1\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}$

[výsledky: a) [0] b) [91] c) [47]]