

Metódy riešenia sústav lineárnych rovníc

Osnova

- 1) Hlavné pojmy
- 2) Gaussova eliminačná metóda (GEM)
 - a) Riešenie nehomogénnej sústavy lineárnych rovníc
 - b) Riešenie homogénnej sústavy lineárnych rovníc
- 3) Riešenie sústav lineárnych rovníc metódou inverznej matice
- 4) Riešenie sústav lineárnych rovníc metódou determinantov
- 5) Kontrolné otázky a úlohy

1. Hlavné pojmy

Definícia 1: Sústavou m -lineárnych rovníc s n -neznámymi sa nazýva sústava rovníc v tvare

[illegible]

pričom čísla a_{ik} pre $i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$ sa nazývajú koeficientmi sústavy, čísla b_i pre $i = 1, 2, \dots, m$ absolútnymi členmi sústavy a $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú neznáme.

Sústavu (1) nazývame **nehomogénnou**, ak aspoň jeden z absolútnych členov $b_i \neq 0$.

Sústavu (1) nazývame **homogénnou**, ak všetky $b_i = 0$.

Sústavu (1) môžeme napísať v maticovom tvare $A \cdot X = B$,

kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ sa nazýva maticou sústavy (1),

matica $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ je maticou neznámych, matica $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ sa nazýva maticou absolútnych

členov sústavy (1).

$$\text{Matica } A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \text{ je rozšířená matice s\u00fasavy (1).}$$

Definição 2

Riešením sústavy (1) sa nazýva každá usporiadaná n -tica reálnych čísel $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, ktorá spĺňa všetky rovnice sústavy (1).

Vyriešiť sústavu znamená nájsť všetky jej riešenia. Sústava môže mať:

- práve jedno riešenie,
- nekonečne veľa riešení,
- prípadne nemá riešenie.

Pomocou nasledujúcej vety môžeme zistiť, či sústava lineárnych rovníc má riešenie.

Frobeniova veta Sústava lineárnych rovníc (1) má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy (1) sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy (1), t.j. $h(A) = h(A_r)$.

Dôsledok Frobeniovej vety pre nehomogénnu sústavu lineárnych rovníc

1. Ak $h(A) = h(A_r) = n$, kde n je počet neznámych sústavy (1) $\Rightarrow$ sústava (1) má jediné riešenie.
2. Ak $h(A) = h(A_r) < n \Rightarrow$ sústava (1) má nekonečne veľa riešení.
3. Ak $h(A) \neq h(A_r) \Rightarrow$ sústava (1) nemá riešenie.

Homogénna sústava lineárnych rovníc je sústava v tvare

$$\boxed{A \cdot X = 0}, \quad (2)$$

pričom A je matica typu m/n .

Homogénna sústava rovníc má vždy riešenie, pretože vždy platí $h(A) = h(A_r)$.

Ak $h(A) = n$, kde n je počet neznámych, tak sústava má práve jedno nulové riešenie $[0, 0, 0, \dots, 0]$.

Ak $h(A) = k < n \Rightarrow$ sústava má nekonečne veľa riešení a existuje $n - k$ lineárne nezávislých riešení, ktoré nazývame fundamentálny systém riešení a každé riešenie sústavy (2) je jeho lineárnou kombináciou.

2. Gaussova eliminačná metóda

Princíp tejto metódy je založený na ekvivalentných úpravách sústavy rovníc (Gaussov algoritmus). Pomocou týchto úprav dostaneme z danej sústavy novú (ekvivalentnú) sústavu, ktorá má tú istú množinu riešení.

Ekvivalentné úpravy rovníc sústavy sú:

1. výmena poradia rovníc v sústave,
2. vynásobenie niektorej rovnice sústavy nenulovým číslom k ,
3. pripočítanie k -násobku jednej rovnice k inej rovnici sústavy,
4. vynechanie, resp. pridanie rovnice, ktorá je násobkom inej rovnice (resp. rovníc) sústavy.

Príklad 1:

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -6$$

Vyriešme v R^3 sústavu lineárnych rovníc:

$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = -12$$

Riešenie:

Rozšírenú maticu sústavy budeme upravovať na redukovaný trojuholníkový tvar tak, aby matica sústavy (pred čiarou) bola v diagonálnom tvare (nad aj pod diagonálou nuly):

$$A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \ (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(2) \ (1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot \frac{1}{8}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-8) \ (5)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

Pre maticu sústavy a rozšírenú maticu sústavy platí $h(A) = h(A_r) = 3, n = 3$.

Z dôsledku Frobeniovej vety vyplýva, že daná sústava má práve jedno riešenie.

K poslednej ekvivalentnej rozšírenej matici sústavy sme priradili sústavu rovníc, z ktorej je zrejmé, že sústava rovníc má práve jedno riešenie $P = \{[2, -3, 1]\}$.

Príklad 2:

Riešme v R^4 sústavu lineárnych rovníc úplnou Gaussovou eliminačnou metódou

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 8x_4 = 1$$

$$3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$$

Riešenie: Rozšírenú maticu sústavy upravíme ekvivalentnými riadkovými úpravami na tvar s dvoma trojuholníkmi (t.j. nuly pod diagonálou aj nad diagonálou).

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (-2)(-1)(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 11 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 11 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 11 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ (2) \quad (-1) \quad (-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 19 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 19 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_A$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{A_r}$

Z prvej rovnice vyjadríme x_1 a z druhej neznámu x_2 :

$$x_1 = -8x_3 - 19x_4$$

$$x_2 = 5x_3 + 11x_4 + 1$$

Všeobecné riešenie danej sústavy rovníc napíšeme v tvare

$$\vec{x} = (-8x_3 - 19x_4, 5x_3 + 11x_4 + 1, x_3, x_4), x_3, x_4 \in R.$$

Príklad 3: Vyriešme v R^3 sústavu rovníc

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11$$

$$x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$$

$$11x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 10$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Riešenie.

Pre rozšírenú maticu sústavy platí :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 11 \\ 11 & -4 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -15 & 30 & -67 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -15 & 30 & -67 \\ 0 & -3 & 4 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{/(15) / \cdot (3)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -37 \end{array} \right)$$

Pre hodnoty matice sústavy a rozšírenej matice sústavy platí: $h(A) \neq h(A^*)$
 $3 \neq 4$,

Daná sústava lineárnych rovníc nemá riešenie, teda $P = \emptyset$.

Postup riešenia homogénnej sústavy lineárnych rovníc Gaussovou eliminačnou metódou je obdobný ako pri nehomogénnej sústave lineárnych rovníc.

Príklad 4:

Vyriešme v R^3 homogénnu sústavu lineárnych rovníc:

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie:

Rozšírenú maticu sústavy upravíme na trojuholníkový tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)(-2)(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)(-\frac{1}{3})(-1)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-5)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Pre hodnoty matic platí: $h(A) = h(A_r) = 2$, $n = 3 \Rightarrow$ sústava má nekonečne veľa riešení

Zistíme počet parametrov: $n - h(A) = 3 - 2 = 1$, za parameter zvolíme x_3 .

K poslednej ekvivalentnej matici prislúcha sústava rovníc, z ktorej vieme vyjadriť neznáme x_1, x_2 (závisia od parametra x_3):

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -6x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &\in R \end{aligned}$$

Množina všetkých riešení sústavy rovníc má vyjadrenie $P = \{[-6x_3, x_3, x_3], x_3 \in R\}$.

3. Riešenie sústav lineárnych rovníc metódou inverznej matice

Majme sústavu n lineárnych rovníc s n neznámymi zapísanú v maticovom tvare, kde A je regulárna matica

$$A \cdot X = B.$$

Potom k matici A existuje inverzná matica A^{-1} , ktorou vynásobíme maticovú rovnicu zľava a dostaneme

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ odkiaľ}$$

$$E \cdot X = A^{-1} B,$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Teda riešenie sústavy lineárnych rovníc s regulárnou maticou A vypočítame podľa tohto vzťahu.

Príklad 5: Vypočítajme v R^3 riešenie sústavy lineárnych rovníc pomocou inverznej matice

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2$$

$$3x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 3$$

$$2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 11.$$

Riešenie:

Matica sústavy A je regulárna, teda existuje k nej inverzná matica A^{-1} . Matice majú prvky

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (overte výpočet)}$$

Podľa vzťahu $X = A^{-1} \cdot B$ dostaneme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Teda riešením danej sústavy lineárnych rovníc je usporiadaná trojica $[x_1, x_2, x_3] = [1, 3, -4]$.

4. Riešenie sústav lineárnych rovníc metódou determinantov

Veta (Cramerovo pravidlo)

Ak je matica A sústavy regulárna, tak sústava má práve jedno riešenie, pričom jednotlivé neznáme sa vypočítajú podľa vzťahu

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kde $|A|$ je determinant matice sústavy (4) a $|A_i|$ je determinant matice, ktorá vznikne z matice A nahradením i -tého stĺpca absolútnymi členmi sústavy rovníc.

Príklad 6: Vyriešme v R^3 danú sústavu lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = -2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7$$

$$x_1 - 4x_2 = -13$$

Riešenie:

Matica sústavy A je regulárna, pretože jej determinant sa nerovná nule:

$$|D| = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 \neq 0.$$

Z toho vyplýva, že daná sústava rovníc má práve jedno riešenie.

Ďalej pre $k = 1, 2, 3$ vypočítame hodnoty determinantov D_k (overte výpočty):

$$|D_1| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \\ -13 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 16, \quad |D_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 1 & -13 & 0 \end{vmatrix} = -48, \quad |D_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & -13 \end{vmatrix} = -16$$

$$x_1 = \frac{16}{-16} = -1, \quad x_2 = \frac{-48}{-16} = 3, \quad x_3 = \frac{-16}{-16} = 1 \Rightarrow [x_1, x_2, x_3] = [-1, 3, 1]$$

Jediným riešením danej sústavy rovníc je usporiadaná trojica

$$[x_1, x_2, x_3] = \left[\frac{|D_1|}{|D|}, \frac{|D_2|}{|D|}, \frac{|D_3|}{|D|} \right] = \left[\frac{16}{-16}, \frac{-48}{-16}, \frac{-16}{-16} \right] = [-1, 3, 1].$$

5. Kontrolné otázky a úlohy

- 1) V akom prípade sa jedná o nehomogénnu sústavu lineárnych rovníc?
- 2) Kedy nehomogénnu sústavu lineárnych rovníc nemá riešenie?
- 3) Môže nastať možnosť, že homogénnu sústavu lineárnych rovníc nemá riešenie a prečo?
- 4) Zopakujte ekvivalentné úpravy sústavy rovníc.

Úloha 1: Riešte sústavu lineárnych rovníc úplnou Gaussovou eliminačnou metódou

$$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \quad (\text{výsledok: } [-1, 0, 1])$$

$$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2$$

Úloha 2: Riešte sústavu lineárnych rovníc úplnou Gaussovou eliminačnou metódou

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \quad (\text{výsledok: nemá riešenie})$$

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10$$

Úloha 3: Riešte sústavu lineárnych rovníc úplnou Gaussovou eliminačnou metódou.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \quad (\text{nekonečne veľa riešení, všeobecné riešenie:})$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -1$$

$$X = (1; x_4 - 1, -x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}$$

Úloha 4: Riešte homogénnu sústavu lineárnych rovníc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad (X = x_3(1, -2, 1, 0) + x_4(1, -2, 0, 1), x_3, x_4 \in \mathbb{R})$$

$$x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$$

Úloha 5: Riešte sústavu lineárnych rovníc

a) inverznou maticou,

b) Cramerovým pravidlom.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7$$

$$3x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 8$$

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 = 3$$

$$2x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 5$$

$$\text{Výsledok: } (X = (1, -1, 2))$$

$$\text{Výsledok: } P = \{[-2, 1, 0]\}$$