

Príklady: pravdepodobnosť

Definícia. Daná je konečná množina Ω . Udalosťou (javom) nazývame ľubovoľnú podmnožinu množiny Ω . **Pravdepodobnosťou** udalosti A nazývame číslo $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet prvkov množiny A , n je počet prvkov množiny Ω

Príklad 1:

V zásielke s 10 výrobkami je 7 štandardných. Náhodne vyberieme 6 výrobkov. Aká je pravdepodobnosť, že:

- a) medzi nimi budú práve 4 štandardné výrobky ?
- b) medzi nimi budú aspoň 4 štandardné výrobky ?

Riešenie:

a) počet všetkých možností pre vybratie 6 výrobkov: $n = \binom{10}{6} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$

počet priaznivých možností: $m = \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} = \frac{7!}{4!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 105$

pravdepodobnosť $P = \frac{m}{n} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$

b) vyberieme aspoň 4 štandardné výrobky, t.j. 4 alebo 5 alebo 6

počet priaznivých možností $m = \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{2} + \binom{7}{5} \cdot \binom{3}{1} + \binom{7}{6} \cdot \binom{3}{0} = 105 + \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{3!}{2!} + \frac{7!}{6!1!} =$
 $= 105 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} + 7 = 105 + 63 + 7 = 175$

pravdepodobnosť $P = \frac{m}{n} = \frac{175}{210} = 0,8\bar{3}$

Príklad 2:

Zo sady 32 kariet vyberieme 4 karty. Zistíme pravdepodobnosť, že medzi nimi bude aspoň jedno eso!

Riešenie:

počet všetkých možností vybrať 4 karty z 32 je: $n = \binom{32}{4} = 35\,960$

jav A - vyberieme aspoň 1 eso, t.j. 1 alebo 2 alebo 3 alebo 4

jav $\bar{A}$ - medzi 4 vytiahnutými kartami nebude ani jedno eso

$\bar{m} = \binom{4}{0} \cdot \binom{28}{4} = 1 \cdot 20\,475 = 20\,475$

použijeme vzťah: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

$P(A) = 1 - \frac{\bar{m}}{n} = 1 - \frac{20\,475}{35\,960} \doteq 0,43$

PODMIENENÁ PRAVDEPODOBNOSŤ

Príklad 3:

V schránke máme 5 bielych a 3 zelené kocky. Dvakrát za sebou vyberieme kocku. Vypočítajme pravdepodobnosť, že:

- a) v druhom ťahu vyberieme zelenú kocku, ak vieme, že v prvom ťahu sme vybrali bielu kocku (po prvom výbere sme kocku nevrátili späť),
- b) v druhom ťahu vyberieme zelenú kocku, ak nevieme, akú kocku sme vybrali v prvom ťahu (po prvom výbere sme kocku nevrátili späť).

Riešenie:

- a) všetky možnosti $n = 7$ (zostalo 7 kociek),
priaznivé možnosti $m = 3$ (po prvom výbere zostali všetky zelené kocky v urne)

$$\Rightarrow P = \frac{3}{7} \doteq 0,4286$$

- b) môžu nastať 2 rôzne možnosti:
(druhá kocka je zelená a prvá kocka je biela)
alebo (druhá kocka je zelená a prvá kocka je tiež zelená)

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B), \quad P(A \cap \bar{B}) = P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})$$

$$P = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \Rightarrow P = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{15+3}{56} = \frac{18}{56} \doteq 0,321429$$

OPAKOVANÉ POKUSY A BERNOULLIHO SCHÉMA

Bernoulliho schéma
$$P(A) = P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

Príklad 4:

Z dlhodobých štatistík je známe, že pravdepodobnosť narodenia chlapca je 0,515 . Vypočítajme pravdepodobnosť, že medzi piatimi po sebe narodenými deťmi budú:

- a) prví dvaja chlapci, ďalšie tri budú dievčatá,
- b) práve traja chlapci.

Riešenie:

- a) pravdepodobnosť narodenia chlapca $p = 0,515$;
pravdepodobnosť narodenia dievčaťa $q = 1 - p = 1 - 0,515 = 0,485$.

Poradie narodenia detí je dané, t.j. priaznivý je len jeden výsledok $[CH, CH, D, D, D]$.

Potom pravdepodobnosť javu je $P = 0,515^2 \cdot 0,485^3 \doteq 0,03026$.

- b) v akom poradí sa deti narodia, nezáleží (použijeme kombinácie bez opakovania),

pre výsledky máme $\binom{5}{3} = 10$ rôznych možností:

napr.: $[CH, CH, D, D, CH]$, $[CH, D, CH, D, CH]$, $[CH, CH, D, CH, D]$, atď. ...

Potom pravdepodobnosť javu je $P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot 0,515^3 \cdot 0,485^2 \doteq 0,321296$.

Príklad 5:

Strelec zasiahne cieľ v každom výstrele s pravdepodobnosťou 0,6.

Aká je pravdepodobnosť, že pri štyroch výstreloch zasiahne cieľ práve tri krát?

Riešenie:

Každý výstrel je nezávislý pokus, preto celkovú pravdepodobnosť môžeme vypočítať podľa Bernoulliho schémy. Pravdepodobnosť zásahu cieľa $p = 0,6$. Pravdepodobnosť minútia cieľa je $q = 1 - p = 1 - 0,6 = 0,4$.

Počet nezávislých pokusov je $n = 4$. Počet zásahov je $k = 3$.

Výsledná pravdepodobnosť: $P_4(3) = \binom{4}{3} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^{4-3} = 4 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,3456$.

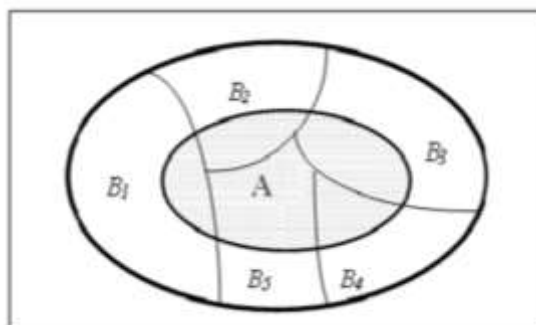
ÚPLNÁ PRAVDEPODOBNOŠŤ A BAYESOV VZOREC

Úplná pravdepodobnosť:

$$P(A) = \sum_{i=1}^s P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^s P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

Bayesov vzorec:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)}$$



Obr. Ukážka úplného systému nezlúčiteľných javov (javy B_i)

Príklad 6:

Do skladu sú dodávané jablká z troch fariem. Dodávka 1. farmy tvorí 35 %, dodávka 2. farmy 40 % a 3. farma dodala 25 % skladových zásob. Vieme, že podiel neštandardných jabĺk je 7 % pre 1. farmu, 4 % pre 2. farmu a 6 % pre 3. farmu. Máme zistiť, z ktorej farmy najpravdepodobnejšie pochádza náhodne vybrané jablko, ktoré je neštandardné.

Riešenie: jav B_i ($i=1,2,3$) - jablko pochádza z i -tej farmy (javy B_i tvoria úplný systém nezlúčiteľných javov), jav A - jablko je neštandardné.

Platí: $P(B_1) = 0,35$; $P(B_2) = 0,40$; $P(B_3) = 0,25$;

$P(B_3) = 0,25$; $P(A|B_1) = 0,07$, $P(A|B_2) = 0,04$, $P(A|B_3) = 0,06$.

Podľa Bayesovho vzorca platí:

$$P(B_1|A) = \frac{0,35 \cdot 0,07}{0,35 \cdot 0,07 + 0,40 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,06} = \frac{0,0245}{0,0555} = \mathbf{0,44};$$

$$P(B_2|A) = \frac{0,40 \cdot 0,04}{0,0555} = 0,29;$$

$$P(B_3|A) = \frac{0,25 \cdot 0,06}{0,0555} = 0,27. \quad \textbf{Odpoveď:} \text{ jablko najpravdepodobnejšie pochádzalo z 1. farmy.}$$