

Príklad. Daná je funkcia $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$. Zistite:

1) intervaly, na ktorých je funkcia $f(x)$ konvexná, konkávna

2) nájdite inflexné body funkcie.

Riešenie:

Definičným oborom danej funkcie je množina R .

1) Konvexnosť, konkávnosť

Vypočítame $f'(x)$ a $f''(x)$:

$$f'(x) = (3x^5 - 5x^4 + 4)' = 15x^4 - 20x^3$$

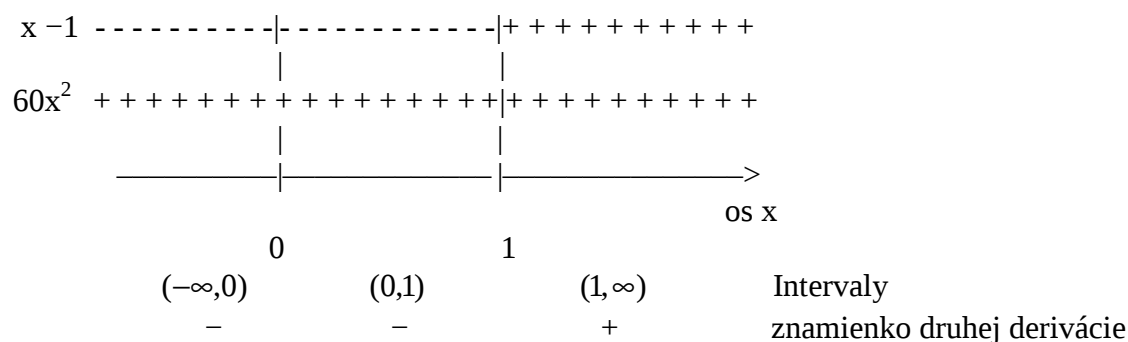
$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 \Rightarrow f''(x) = 60x^2(x-1)$$

Vyriešime nerovnicu: $f''(x) > 0$

$$60x^2(x-1) > 0$$

Nulové body druhej derivácie:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$



Záver:

Funkcia je **konvexná** na intervale $(1, \infty)$, pretože pre všetky $x \in (1, \infty)$ je $f''(x) > 0$,

Funkcia je **konkávna** na intervaloch $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ (funkcia je definovaná v bode 0, preto môžeme intervaly zjednotiť, teda funkcia je konkávna na intervale $(-\infty, 1)$, pretože pre všetky $x \in (-\infty, 1)$ je $f''(x) < 0$)

2) Inflexné body

Inflexné body zistíme z nutnej podmienky inflexného bodu tak, že riešime rovnicu

$$f''(x) = 0$$

$$60x^2(x-1) = 0$$

Riešením rovnice sú: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Vypočítame tretiu deriváciu funkcie $f'''(x) = 180x^2 - 120x$, na základe postačujúcej podmienky inflexného bodu $[f'''(x_1) \neq 0, f'''(x_2) \neq 0]$ rozhodneme, či ide o inflexné body.

Zistíme hodnotu tretej derivácie pre body $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Platí: $f'''(x_1) = f'''(0) = 0$, teda v bode $x_1 = 0$ **nemá** funkcia inflexný bod.

$f'''(x_2) = f'''(1) = 180 \cdot 1 - 120 \cdot 1 = 60 \neq 0$, teda v bode $x_2 = 1$ **má** funkcia inflexný bod.

Pre funkčnú hodnotu platí $f(1) = 3 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^4 + 4 = 2$