

Riešenie sústav lineárnych rovníc - aplikácie**PRÍKLAD 1**

Výrobca pripravil tovar pre 3 objednávateľov s nasledovnými cenami: produkt A stojí x Sk, produkt B stojí y Sk, produkt C stojí z Sk. Vypočítajme ceny jednotlivých produktov, ak

1. firma objednala 100 ks výrobku A, 150 ks výrobku B, 200 ks výrobku C za 28 500 Sk,
2. firma objednala 200 ks výrobku A, 100 ks výrobku B, 50 ks výrobku C za 20 500 Sk
- a 3. firma objednala 150 ks výrobku A, 200 ks výrobku B, 100 ks výrobku C za 27 250 Sk.

Riešenie:

Označme neznáme ceny produktov A, B, C ako vektor $\vec{x} = (x, y, z)$.

Z údajov je zrejmé, že neznáme ceny musia spĺňať tieto rovnice, ktoré tvoria sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi x, y, z :

$$\begin{aligned}
 100x + 150y + 200z &= 28500 \\
 200x + 100y + 50z &= 20500 \\
 150x + 200y + 100z &= 27250
 \end{aligned}
 \Rightarrow A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 150 & 200 & 28500 \\ 200 & 100 & 50 & 20500 \\ 150 & 200 & 100 & 27250 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 570 \\ 4 & 2 & 1 & 410 \\ 3 & 4 & 2 & 545 \end{array} \right) \begin{matrix} (-2) (3) \\ \leftarrow \downarrow \\ \leftarrow (-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 570 \\ 0 & -4 & -7 & -730 \\ 0 & 1 & 8 & 620 \end{array} \right) \begin{matrix} \leftarrow \leftarrow \\ (4) \leftarrow \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 570 \\ 0 & 1 & 8 & 620 \\ 0 & 0 & 25 & 1750 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \\ \\ (\frac{1}{25}) \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 570 \\ 0 & 1 & 8 & 620 \\ 0 & 0 & 1 & 70 \end{array} \right) \Rightarrow z = 70$$

$$\begin{aligned}
 y + 8 \cdot 70 &= 620 & 2x + 3 \cdot 60 + 4 \cdot 70 &= 570 \\
 y &= -560 + 620 & 2x &= 110 \\
 y &= 60 & x &= 55
 \end{aligned}$$

Odpoveď: cena produktu A je 55 Sk, cena produktu B je 60 Sk a cena produktu C je 70 Sk.

PRÍKLAD 2

Podnik vyrába tri druhy výrobkov V1, V2, V3, na ktoré potrebuje suroviny s_1, s_2, s_3 . Na vyrobenie jedného výrobku V1 potrebuje 20 jednotiek $[j.]$ suroviny s_1 , 30 $j.$ suroviny s_2 a 40 $j.$ suroviny s_3 . Na výrobu jedného výrobku V2 potrebuje 40 $j.$ suroviny s_1 , 50 $j.$ suroviny s_2 a 30 $j.$ suroviny s_3 . Na výrobu jedného výrobku V3 potrebuje 30 $j.$ suroviny s_1 , 10 $j.$ suroviny s_2 a 50 $j.$ suroviny s_3 . Koľko kusov výrobkov V1, V2, V3 bolo vyrobených, ak sa spotrebovalo 5500 $j.$ suroviny s_1 , 5900 $j.$ suroviny s_2 a 7500 $j.$ suroviny s_3 ?

Riešenie:

Postup riešenia čitateľovi stručne naznačíme. Spotrebné vektory pre jednotlivé výrobky sú: (20, 30, 40) pre výrobok V1, (40, 50, 30) pre výrobok V2, (30, 10, 50) pre výrobok V3 a pre celkovú výrobu (5500, 5900, 7500). Z týchto údajov zostavíme sústavu lineárnych rovníc s neznámymi x_1, x_2, x_3 , ktorú môžeme riešiť eliminačnou metódou.

$$\begin{aligned} 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 &= 5500 & x_1 &= 80 \\ 30x_1 + 50x_2 + 10x_3 &= 5900 & \Rightarrow x_2 &= 60 \\ 40x_1 + 30x_2 + 50x_3 &= 7500 & x_3 &= 50 \end{aligned}$$

Z daného množstva surovín s_1, s_2, s_3 bolo vyrobených 80 kusov výrobku V1, 60 kusov výrobku V2 a 50 kusov výrobku V3.

PRÍKLAD 3

Kvapalné hnojivo A obsahuje 25% dusíka, 15% fosforu a 10% draslíka, kvapalné hnojivo B obsahuje 15% dusíka, 15% fosforu a 5% draslíka, kvapalné hnojivo C obsahuje 20% dusíka, 10% fosforu a 10% draslíka.

Vypočítajte, koľko litrov každého hnojiva je treba na výrobu 100 l hnojiva D, ktoré má obsahovať 20% dusíka, 13% fosforu a 8,5% draslíka?

Riešenie:

Nech vektor $\vec{v}_i = (N_i, P_i, K_i)$ vyjadruje percentuálny obsah dusíka, fosforu a draslíka v jednotlivých hnojivách. Musí byť splnená vektorová rovnica

$$(25; 15; 10) \cdot l_1 + (15; 15; 5) \cdot l_2 + (20; 10; 10) \cdot l_3 = (20; 13; 8,5) \cdot 100,$$

kde l_1, l_2, l_3 sú hľadané množstvá hnojív A, B, C v litroch. Rozpíšeme rovnicu po zložkách a dostávame sústavu troch lineárnych rovníc o 3 neznámych l_1, l_2, l_3

$$\begin{aligned} 25l_1 + 15l_2 + 20l_3 &= 2000 & / \cdot 1/5 \\ 15l_1 + 15l_2 + 10l_3 &= 1300 & / \cdot 1/5 \\ 10l_1 + 5l_2 + 10l_3 &= 850 & / \cdot 1/5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \hline 5l_1 + 3l_2 + 4l_3 &= & 400 \\ 3l_1 + 3l_2 + 2l_3 &= & 260 \\ 2l_1 + l_2 + 2l_3 &= & 170 \\ \hline 2l_1 + l_2 + 2l_3 &= & 170 \\ l_2 - 2l_3 &= & -50 \\ 3l_2 - 2l_3 &= & 10 \\ \hline 2l_1 + l_2 + 2l_3 &= & 170 \\ l_2 - 2l_3 &= & -50 \\ 4l_3 &= & 160 \Rightarrow l_3 = 40 \\ & & l_2 = 30 \\ & & l_1 = 30 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (2) \leftarrow \\ / \cdot (-5) \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (2) \leftarrow \\ / \cdot (-3) \leftarrow \end{array}$$

Na výrobu 100 litrov hnojiva D potrebujeme 30 litrov hnojiva A, 30 litrov hnojiva B a 40 litrov hnojiva C.

ÚLOHA (VYSKÚŠAJTE SA !)

Vedúca jedálne nakupovala mäso, pričom 1 kg bravčového mäsa stál x Sk, 1 kg kuracieho mäsa stál y Sk a 1 kg hovädzieho mäsa stál z Sk. Vypočítajte ceny mäsa, ak 1. deň kúpila 10 kg bravčového, 15 kg kuracieho a 5 kg hovädzieho mäsa za 2 300 Sk, 2. deň kúpila po 5 kg mäsa z každého druhu za 1 200 Sk a 3. deň kúpila 15 kg bravčového, 10 kg kuracieho a 8 kg hovädzieho mäsa za 2 740 Sk.

[riešenie: $x = 100$ Sk, $y = 60$ Sk, $z = 80$ Sk]