

Definícia – parciálna derivácia funkcie podľa premennej x

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Ak existuje limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$, tak túto limitu

nazývame **parciálnou deriváciou funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x v bode $[x_0, y_0]$** .

Poznámka:

Keď derivujeme funkciu podľa premennej x , tak y považujeme za konštantu. Derivujeme funkciu s jednou premennou x .

Definícia – parciálna derivácia funkcie podľa premennej y

Nech funkcia $f(x, y)$ je definovaná v okolí bodu $[x_0, y_0]$.

Ak existuje limita $\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$, tak túto limitu

nazývame **parciálnou deriváciou funkcie $f(x, y)$ podľa premennej y v bode $[x_0, y_0]$** .

Poznámka:

Keď derivujeme funkciu podľa premennej y , tak x považujeme za konštantu. Derivujeme funkciu s jednou premennou y .

Veta 1 – pravidlá na výpočet derivácií

Platí: (1) $[k \cdot f(x, y)]'_x = k \cdot f'_x(x, y)$, k je konštantu,
 $[k \cdot f(x, y)]'_y = k \cdot f'_y(x, y)$, k je konštantu
(derivujeme súčin konštanty a funkcie)

(2) $[f(x, y) + g(x, y)]'_x = f'_x(x, y) + g'_x(x, y)$,
 $[f(x, y) + g(x, y)]'_y = f'_y(x, y) + g'_y(x, y)$
(derivujeme súčet funkcií)

$$(3) \quad \begin{aligned} [f(x, y) \cdot g(x, y)]'_x &= f'_x(x, y) \cdot g(x, y) + f(x, y) \cdot g'_x(x, y), \\ [f(x, y) \cdot g(x, y)]'_y &= f'_y(x, y) \cdot g(x, y) + f(x, y) \cdot g'_y(x, y) \end{aligned}$$

(derivujeme súčin funkcií)

$$(4) \quad \begin{aligned} \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right]'_x &= \frac{f'_x(x, y) \cdot g(x, y) - f(x, y) \cdot g'_x(x, y)}{g^2(x, y)}, g^2(x, y) \neq 0, \\ \left[\frac{f(x, y)}{g(x, y)} \right]'_y &= \frac{f'_y(x, y) \cdot g(x, y) - f(x, y) \cdot g'_y(x, y)}{g^2(x, y)}, g^2(x, y) \neq 0 \end{aligned}$$

(derivujeme podiel funkcií)

Parciálne derivácie zloženej funkcie s jednou vnútornou zložkou

a – vnútorná zložka funkcie

b – vonkajšia zložka funkcie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial b}{\partial a}$$

Parciálne derivácie zloženej funkcie s dvoma vnútornými zložkami

Nech zložená funkcia má vyjadrenie $z = F(u, v)$.

Funkcie $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ sú vnútorné zložky s premennými x, y ,

$F(u, v)$ vyjadruje vonkajšiu zložku funkcie s premennými u, v .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Definícia – parciálne derivácie druhého rádu funkcie $f(x, y)$

Nech pre funkciu $f(x, y)$ s oblasťou definície $D(f)$ existujú parciálne derivácie 1. rádu.

Ak na množine $M \subset D(f)$ existujú parciálne derivácie parciálnych derivácií 1. rádu podľa premenných x, y , tak ich nazývame **parciálne derivácie 2. rádu**.

Zápis parciálnych derivácií 2. rádu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{alebo} \quad f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{alebo} \quad f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{alebo} \quad f''_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{alebo} \quad f''_{yx}$$

Poznámka. Nech sú **zmiešané parciálne derivácie** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ funkcie $f(x, y)$ spojité v bode $[x_0, y_0]$. Potom platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Dotyková rovina ku grafu funkcie dvoch premenných

Rovnica dotykovej roviny ku grafu funkcie $f : z = f(x, y)$ v dotykovom bode $T = [x_0, y_0, z_0]$ má vyjadrenie:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Príklad:

Vypočítajme rovnicu dotykovej roviny ku grafu funkcie $f : z = x^2 + 2y^2 - 5$ v dotykovom bode $T = [2, -1, z_0 = ?]$

Riešenie:

Tretia súradnica dotykového bodu (funkčná hodnota):

$$z_0 = f(2, -1) = 2^2 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 = 4 + 2 - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad T = [2, -1, 1]$$

Parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x^2 + 2y^2 - 5)'_x = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x^2 + 2y^2 - 5)'_y = 4y$$

Vypočítame hodnoty parciálnych derivácií v bode $[x_0, y_0] = [2, -1]$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, -1) = 4 \cdot (-1) = -4$$

Údaje dosadíme do rovnice dotykovej roviny:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 1 = 4 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (y - (-1))$$

$$z - 1 = 4x - 8 - 4y - 4$$

$$z = 4x - 4y - 11 \quad \text{rovnicu dotykovej roviny}$$

Poznámka. Pri výpočte lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných budeme používať determinant druhého stupňa, preto uvidíme postup jeho výpočtu. Determinant druhého stupňa vypočítame nasledovne

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

prvky determinantu $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sú reálne čísla.

Príklad: vypočítajme hodnoty determinantov

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 8 \cdot (-4) = 36,$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 0 \cdot 4 = -15,$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 0$$

Poznámka. Determinant môže byť kladné číslo, alebo záporné číslo, alebo nula.

Lokálne extrémny funkcie $f(x, y)$

Definícia (lokálne maximum, lokálne minimum)

Hovoríme, že funkcia $f(x, y)$ má v bode $M_0 = [x_0, y_0]$

lokálne maximum (resp. **lokálne minimum**),

ak pre každý bod $[x, y]$ z okolia bodu M_0 platí

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp.} \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

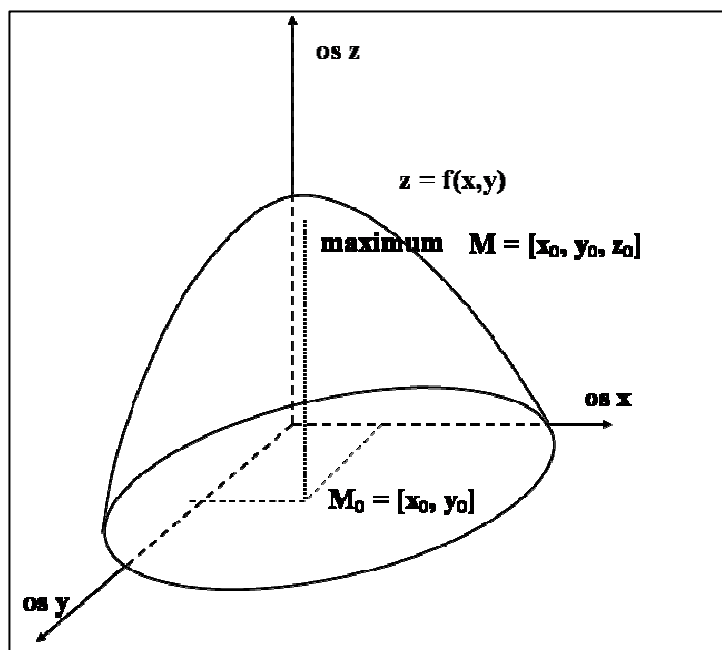
Veta

Nech funkcia $f(x, y)$ má v bode $M_0 = [x_0, y_0]$

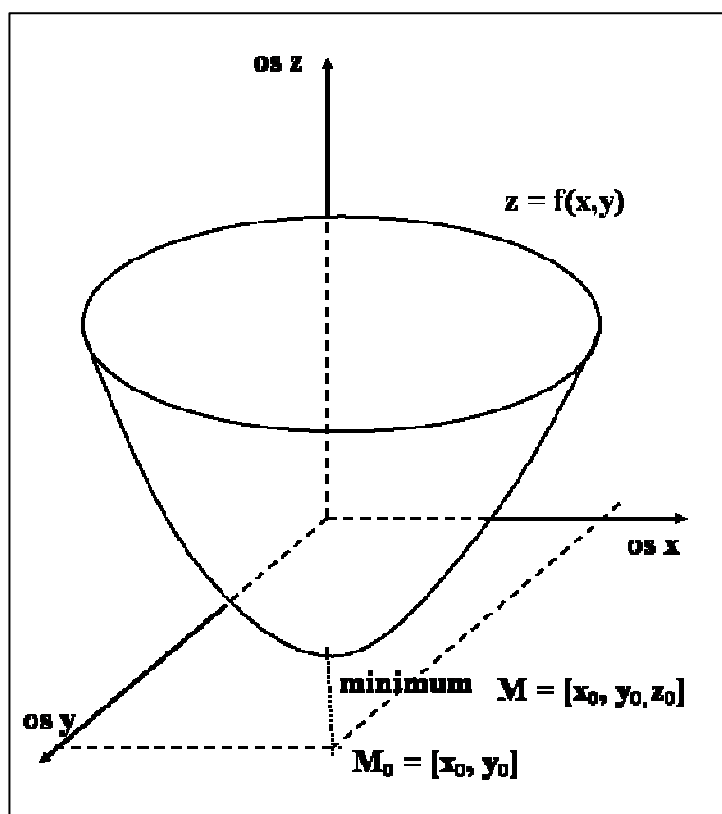
lokálny extrém a nech existujú spojité parciálne derivácie 1. rádu

$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)$. Potom pre parciálne derivácie 1. rádu platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0.$$



Obrázok – lokálne maximum funkcie



Obrázok – lokálne minimum funkcie

Definícia.

Bod $M_0 \in D(f)$, pre ktorý platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$

nazývame **stacionárny bod funkcie** $f(x, y)$.

Veta (o lokálnych extrémoch)

Nech bod $M_0 = [x_0, y_0]$ je stacionárny bod funkcie $f(x, y)$

a nech má funkcia v bode M_0 spojité parciálne derivácie 2. rádu.

$$\text{Nech determinant } D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(M_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix} > 0.$$

Potom má funkcia $f(x, y)$ v bode M_0 lokálny extrém, a to:

- 1) lokálne minimum, ak súčasne platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$,
- 2) lokálne maximum, ak súčasne platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$.

Poznámka

Ak pre determinant z vety platí $D < 0$, tak funkcia $f(x, y)$ v bode M_0 nemá extrém.

Ak je hodnota determinantu $D = 0$, nevieme rozhodnúť o existencii lokálneho extrému.

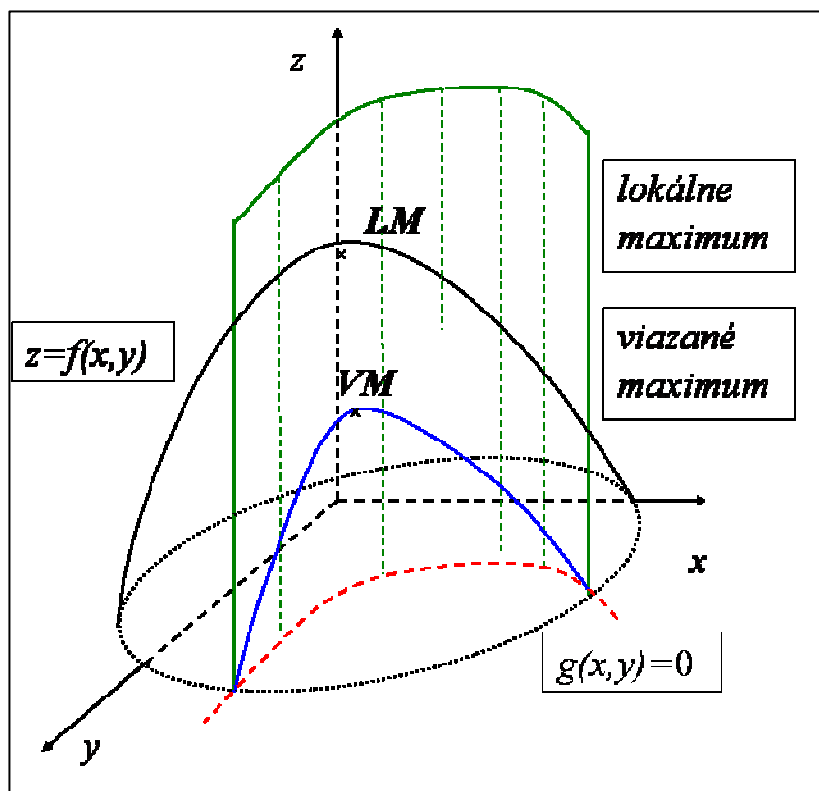
Musíme vyšetrovať funkciu $f(x, y)$ v okolí stacionárneho bodu M_0 inými metódami.

Viazané lokálne extrémy

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie $f(x, y)$ uvažujeme x, y na celej oblasti definície $D(f)$. Niekedy je však potrebné nájsť lokálne extrémy na niektorej podmnožine G oblasti definície $D(f)$ ($G \subset D(f)$). To znamená, že do podmnožiny G patria tie body $[x, y]$ z množiny $D(f)$, ktoré spĺňajú nejakú podmienku. Táto podmienka býva zvyčajne vyjadrená rovnicou $g(x, y) = 0$.

Definícia

Nech $z = f(x, y)$ je funkcia s oblasťou definície $D(f)$, nech M je množina bodov, ktoré spĺňajú rovnicu $g(x, y) = 0$, označme $G = M \cap D(f)$. Lokálne extrémy funkcie $f(x, y)$ na množine G nazývame **viazanými lokálnymi extrémami** a rovnicu $g(x, y) = 0$ nazývame **väzba (podmienka, obmedzenie)**.



Pri hľadaní viazaných lokálnych extrémov funkcie $z = f(x, y)$ s väzbou $g(x, y) = 0$ môžu nastať dve možnosti:

1.) Rovnica väzby $g(x, y) = 0$ určuje jedinú funkciu $y = h(x)$.

Potom môžeme funkciu $y = h(x)$ dosadiť do funkcie $z = f(x, y)$ za premennú y . Vytvoríme tak funkciu jednej premennej $z = f[x, h(x)] = F(x)$. Lokálne extrémymy funkcie $F(x)$ nájdeme pomocou metód pre extrémymy funkcie jednej premennej.

2.) Väzbou $g(x, y) = 0$ nie je určená jediná funkcia $y = h(x)$, alebo má väzba zložitý tvar.

Lokálne extrémymy funkcie $z = f(x, y)$ s podmienkou väzby $g(x, y) = 0$ vypočítame pomocou Lagrangeovej metódy, ktorú teraz uvedieme.

Lagrangeova metóda výpočtu viazaných extrémov (postup):

1.) vytvoríme pomocnú (Lagrangeovu) funkciu

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y),$$

kde číslo λ (lambda – grécke písmeno) sa nazýva **Lagrangeov multiplikačný činiteľ (multiplikátor)** a budeme hľadať lokálne extrémymy Lagrangeovej funkcie $F(x, y)$.

2.) Vypočítame parciálne derivácie 1. rádu pre Lagrangeovu funkciu

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

3.) Stacionárne body a koeficient λ vypočítame zo sústavy troch rovníc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

4.) Vypočítame parciálne derivácie 2. rádu pre Lagrangeovu funkciu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

5.) Pomocou determinantu

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(M_0) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}$$

zistíme, či funkcia $F(x, y)$ má alebo nemá v stacionárnych bodoch lokálne extrém.

Pomocou hodnoty $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(M_0)$ zistíme, či funkcia má v extréme maximum alebo minimum.

Záver:

Ak funkcia $F(x, y)$ má lokálny extrém v stacionárnom bode $[x_0, y_0]$ spĺňajúcom podmienku väzby $g(x, y) = 0$,
potom funkcia $f(x, y)$ má viazaný lokálny extrém v bode $[x_0, y_0]$.

Poznámka.

Môže sa stať, že Lagrangeovou metódou nenájdeme všetky lokálne extrémny funkcie $f(x, y)$ s podmienkou väzby $g(x, y) = 0$. Vtedy musíme použiť inú metódu, napr. pomocou **kvadratických foriem** zistíme existenciu extrému, alebo použijeme metódu testovania funkčných hodnôt.