

1.1. POJEM ÚROKU

- ak veriteľ poskytne určitú sumu dlžníkovi na dočasné užívanie, tak dlžník za právo používať požičané peniaze platí veriteľovi určitý poplatok (odmenu) ;
- peňažnú sumu, ktorú poskytuje veriteľ dlžníkovi za určitý poplatok nazývame **kapitál (istina)** ;
- poplatok, ktorý platí dlžník veriteľovi za používanie jeho peňazí, nazývame **úrok** ;
- veriteľom, ale aj dlžníkom, môže byť fyzická alebo právnická osoba (občan, spoločnosť banka):



Veľkosť úroku sa určuje ako percentová časť istiny za úrokové obdobie.

Úroková perióda – časové obdobie, za ktoré percentová miera určuje úrok ako časť kapitálu

Úroková sadzba – percentová miera, zodpovedajúca úrokovej perióde, napr. 6%

Úroková perióda (a teda aj zodpovedajúca úroková miera) môže byť :

ročná (per annum, p.a.)
polročná (per semestrem, p.s.)
štvrt'ročná (per quartalem, p.q.)
mesačná (per mensem, p.m.)
týždenná (per septimanam, p.sept.)
denná

Proces spojený s výpočtom úroku nazývame **úrokovanie**.

Poznáme dva základné typy úrokovania :

- **jednoduché úrokovanie** (vyplácané úroky sa k pôvodnému kapitálu nepripočítavajú a ďalej sa neúrokJú, teda úrok sa počíta stále z pôvodného kapitálu)
- **zložené úrokovanie** (úroky sa pripisujú k peňažnej čiastke a spolu s ňou sa ďalej úrokJú)

Podľa splatnosti úroku delíme úrokovanie na :

- **polehotné (dekurzívne)** – úrok sa platí na konci úrokovej periódy
- **predlehotné (anticipatívne)** – úrok sa platí na začiatku úrokovej periódy

1.2. JEDNODUCHÉ POLEHOTNÉ ÚROKOVANIE

Budeme používať označenia :

K_0 - istina, začiatková hodnota kapitálu, z ktorej sa počíta úrok

u - úrok

p - $p\%$ -tná úroková miera s určením úrokovej periódy

$i = \frac{p}{100}$ - úroková sadzba s určením úrokovej periódy

n - dĺžka úrokového obdobia vyjadrená v jednotkách úrokovej periódy

Pri jednoduchom úrokovaní úrok u z istiny K_0 pri úrokovej sadzbe i za n úrokových periód vypočítame podľa vzťahu

$$u = K_0 \times i \times n$$

alebo podľa vzťahu

$$u = K_0 \times \frac{p}{100} \times n,$$

ak namiesto i použijeme p .

Príklady.

- Pr.1.** Banka poskytuje 11%-ný ročný úrok na uložených vkladoch. Banka pripisuje úroky v poslednom dni každého štvrťroka. Peniaze, uložené na vklad sa úročia za bežný mesiac, ak sú vložené do 8. dňa v bežnom mesiaci. Občan si otvoril účet 8. januára a vložil sumu 5000 peňažných jednotiek (p.j.). Aký veľký úrok získa do 30. júna ?
- Pr.2.** Vklad 10 000 p.j. priniesol za 6 mesiacov úrok 300 p.j. Na akú ročnú úrokovú mieru bol uložený ?
- Pr.3.** Banka poskytuje na vkladoch 8%-ný ročný úrok. Karol potrebuje za 9 mesiacov vrátiť dlžobu 5000 p.j. Koľko musí teraz vložiť do banky, aby mal za 9 mesiacov túto sumu k dispozícii ?
- Pr.4.** Za akú dobu prinesie vklad 10 000 p.j. pri 8%-nej ročnej úrokovej miere úrok 200 p.j. ?
- Pr.5.** Helena si vypožičala od úverovej spoločnosti 3000 p.j. pri 1%-nej mesačnej úrokovej miere na dobu 10-tich mesiacov. Dlh chce splatiť desiatimi mesačnými splátkami. Ako sa bude vyvíjať jej finančná bilancia a aký veľký celkový úrok zaplatí ?

V prípade, že doba, za ktorú sa počíta úrok, je určená v dňoch, na výpočet veličiny n používame 2 metódy, podľa toho, aký základ zoberieme za celkový počet dní roka :

- **banková (ordinárna) metóda** $n = \frac{t}{360}$, t – počet dní
- **exaktná (presná) metóda** $n = \frac{t}{365}$, t – počet dní

Počet dní t môžeme vyjadriť presne podľa kalendára, alebo približne podľa bankového pravidla ($\equiv$ každý rok má 360 dní a každý mesiac má 30 dní)

Dostaneme tak 4 možné spôsoby výpočtu úroku:

1) banková metóda s presným počtom dní

$$\text{(francúzska metóda)} \quad \frac{t}{360} \quad \begin{array}{l} - \text{presne} \\ - \text{približne} \end{array}$$

2) banková metóda s približným počtom dní

$$\text{(nemecká obchodná metóda)} \quad \frac{t}{360} \quad \begin{array}{l} - \text{približne, mesiac 30 dní} \\ - \text{približne} \end{array}$$

3) exaktná metóda s presným počtom dní

$$\text{(anglická metóda)} \quad \frac{t}{365} \quad \begin{array}{l} - \text{presne} \\ - \text{presne} \end{array}$$

4) exaktná metóda s približným počtom dní $\frac{t}{365}$ $\begin{array}{l} - \text{približne, mesiac 30 dní} \\ - \text{presne} \end{array}$

Pr.6. Vypočítajme úrok z istiny 10 000 p.j. pri úrokovej sadzbe 0,08 za obdobie od 15.1. do 10.9. (rôznymi metódami)

Poznámka. Úrok vypočítaný bankovou metódou (1. alebo 2.) je väčší ako úrok vypočítaný exaktnou metódou:

$$\frac{\text{bankový úrok}}{\text{exaktný úrok}} = \frac{K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{360}}{K_0 \cdot i \cdot \frac{t}{365}} = \frac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{365}} = \frac{365}{360} = \frac{73}{72} = 1,0138$$

Výpočet úroku z viacerých vkladov

Chceme určiť veľkosť celkového úroku z viacerých kapitálov $K_1, K_2, \dots, K_r$ pri rôznych úrokových obdobiach $t_1, t_2, \dots, t_r$ pri rovnakej úrokovej miere.

Nech kapitál K_1 je úročený za t_1 dní,

kapitál K_2 je úročený za t_2 dní,

$\vdots$

kapitál K_r je úročený za t_r dní

pri rovnakej p %-nej úrokovej miere.

Vypočítame celkový úrok z kapitálov $K_1, K_2, \dots, K_r$ podľa vzťahu

$$u = \sum_{j=1}^r K_j \times \frac{p}{100} \times \frac{t_j}{360} = \sum_{j=1}^r \frac{K_j \times t_j}{\frac{100}{p}}$$

Veličinu $\frac{K_j \times t_j}{100}$ nazývame **úrokové číslo** (pre j -ty vklad), $\frac{360}{p}$ nazývame **úrokový deliteľ**.

Príklad 7. Aký bude celkový úrok na konci roka pri 4%-nej ročnej úrokovej miere, ak sa počas roka uskutočnili nasledovné vklady : 20.1. 500 p.j. ; 10.3. 400 p.j. ; 10.5. 600 p.j. ; 20.10. 1000 p.j.

Výpočet základných veličín pri jednoduchom úrokovaní

Úrok zo začiatkovej hodnoty kapitálu vypočítame podľa vzťahu $u = K_0 \times i \times n$. Úrok pripočítame k začiatkovej hodnote kapitálu K_0 , dostaneme veličinu $K_n = K_0 + u$, ktorá určuje konečnú hodnotu kapitálu po n úrokových periódach. K_n nazývame **budúca (konečná, výsledná) hodnota kapitálu** pre n úrokových periód.

$$K_n = K_0 + u = K_0 + K_0 i n = K_0(1 + i n)$$

Môžeme vyjadriť základné vzťahy pre:

- výpočet konečnej (budúcej) hodnoty kapitálu

$$K_n = K_0(1 + i n)$$

- výpočet prítomnej hodnoty kapitálu

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i n}$$

- výpočet úrokovej sadzby

$$i = \frac{K_n - K_0}{n K_0}$$

- výpočet dĺžky úrokového obdobia

$$n = \frac{K_n - K_0}{i K_0}$$

Veličinu $r_n = 1 + i n$ nazývame **úročiteľ** (úrokovací faktor) ak $n = 1$, tak $r = 1 + i$.

Pr.8. Občan vložil do banky 15.3. 5000 p.j. Banka poskytuje na vklady 8%-nú ročnú úrokovú mieru. Akú veľkú bude mať sumu na účte na konci roka ?

Jednoduchý úrok ako lineárna funkcia času :

$$K_n = K_0 + K_0 \times i \times n$$

K_0 - konštanta, i - konštanta

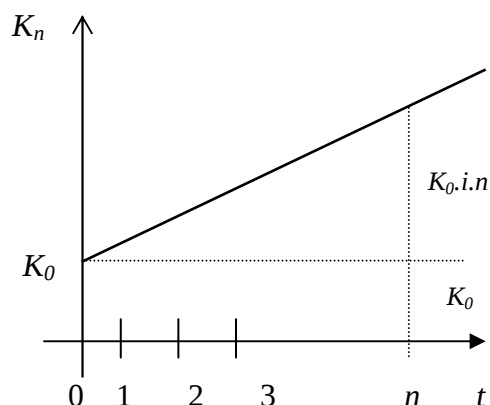
n - premenná, $K_0 \times i = a$

$$K_n = K_0 + a \cdot n$$

$$K_n = b + a \cdot n$$

$$K_n = K_n(n)$$

$$n = 0 \Rightarrow K_n = K_0$$



Pr.9. Vyjadrite závislosť budúcej hodnoty istiny $K_0 = 2000$ p.j. pri 10%-ej ročnej úrokovej miere od dĺžky úrokového obdobia .

Pr.10. Pán N investoval 5000 p.j. na účet, ktorý prináša 8% ročného úroku. Ako dlho má nechať túto sumu na účte v mesiacoch, aby získal 300 p.j. ?

Vzťah $K_0 = \frac{K_n}{1 + in}$ vyjadruje časovú hodnotu peňazí, t.j. prítomnú (súčasnú) hodnotu budúcich príjmov.

Znázornenie: pre kapitál K_0 , úrokové obdobie $n = 1$ rok, $p = 8 \%$ p.a.



Pr.11. Ročná miera dividend na úsporách a pôžičkách v spoločnosti je 6%. Dividendy sú účtované na osobné účty 30.6. a 31.12. Peniaze vložené do 10. v mesiaci prinášajú dividendy za bežný mesiac, ináč až v nasledujúcom mesiaci. Občan si otvoril účet 8.1. s vkladom 500 p.j., 20.2. pridal 300 p.j. a 10.6. ďalších 400 p.j. Aké bude množstvo p.j. na účte 30. 6. ?

Priemerná úroková miera

Predpokladajme, že jedna osoba uskutoční r vkladov za týchto podmienok:

Vklad	úroková miera	úrokové obdobie
K_1	p_1	t_1 dní
K_2	p_2	t_2 dní
$\vdots$		$\vdots$
K_r	p_r	t_r dní

Celkový úrok bude

$$U_1 + U_2 + \dots + U_r$$

$$K_1 \cdot \frac{p_1}{100} \cdot \frac{n_1}{360} + K_2 \cdot \frac{p_2}{100} \cdot \frac{n_2}{360} + \dots + K_r \cdot \frac{p_r}{100} \cdot \frac{n_r}{360}$$

Priemernou úrokovou mierou vkladov $K_1, K_2, \dots, K_r$ nazývame takú úrokovú mieru p , ktorá aplikovaná na vklady $K_1, K_2, \dots, K_r$ a zodpovedajúce úrokové obdobia $n_1, n_2, \dots, n_r$ prinesie rovnaký úrok ako je celkový zisk. Vypočítame ju podľa vzťahu

$$K_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{n_1}{360} + K_2 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{n_2}{360} + \dots + K_r \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{n_r}{360} = K_1 \cdot \frac{p_1}{100} \cdot \frac{n_1}{360} + K_2 \cdot \frac{p_2}{100} \cdot \frac{n_2}{360} + \dots + K_r \cdot \frac{p_r}{100} \cdot \frac{n_r}{360}$$

$$p \cdot \left(\frac{K_1}{100} \cdot \frac{n_1}{360} + \frac{K_2}{100} \cdot \frac{n_2}{360} + \dots + \frac{K_r}{100} \cdot \frac{n_r}{360} \right) = K_1 \cdot \frac{p_1}{100} \cdot \frac{n_1}{360} + K_2 \cdot \frac{p_2}{100} \cdot \frac{n_2}{360} + \dots + K_r \cdot \frac{p_r}{100} \cdot \frac{n_r}{360}$$

$$p \cdot (K_1 \cdot n_1 + K_2 \cdot n_2 + \dots + K_r \cdot n_r) = (K_1 \cdot p_1 \cdot n_1 + K_2 \cdot p_2 \cdot n_2 + \dots + K_r \cdot p_r \cdot n_r)$$

$$p \cdot \sum_{j=1}^r K_j n_j = \sum_{j=1}^r K_j p_j n_j$$

$$p = \frac{\sum_{j=1}^r K_j p_j n_j}{\sum_{j=1}^r K_j n_j}$$

Príklad 12. Karol si zobral pôžičku od Ivana 500 p.j. 20. 2. pri úrokovej miere 20%, od Jána pôžičku 1000 p.j. 10.5. pri úrokovej miere 15% a od Milana pôžičku 1000 p.j. 15.9. pri úrokovej miere 10%. Všetky tri pôžičky má vrátiť 31.12. Určte, akú úrokovú mieru mal dohodnúť pre všetky tri pôžičky, aby koncom roka zaplatil rovnako veľký celkový úrok !

1.3. DISKONT

V bankovníctve a v ekonómii vôbec je často potrebné porovnať dve čiastky v čase. Napr. pri rozhodovaní, či platiť v hotovosti alebo využiť možnosti úveru a platiť v budúcnosti. Peniaze v čase majú rôznu hodnotu : čím skôr peniaze budeme mať, tým skôr ich môžeme investovať a prinesú nám úrok a naopak. Aby sme mohli porovnávať peniaze v čase, potrebujeme poznať súčasnú hodnotu. Súčasnou hodnotou rozumieme čiastku, ktorá, ak bude úrokovaná v časovom období, prinesie budúcu hodnotu.

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + i \cdot n} \text{ - diskontovaná hodnota kapitálu } K_n$$

Výpočet súčasnej hodnoty z budúcej hodnoty nazývame **diskontovanie (matematický diskont)**. Metóda diskontovania sa používa vtedy, keď kapitál K_n je splatný až po určitej dobe n (napr. pôžička, úver). Ak ho chce dlžník splatiť v súčasnosti, nezaplatí veriteľovi celú

čiasťku K_n , ale len tú jej časť, ktorá by za n úrokových období pri dohodnutej úrokovej sadzbe vzrástla spolu s úrokmi na hodnotu K_n .

Príklad (Investičné varianty). Čo je pre nás výhodnejšie pri kúpe daru:

1. zaplatiť teraz v hotovosti 50 000 p.j.,

alebo

2. zaplatiť o rok 54 000 p.j. ?

Riešenie:

Hotovosť môžeme investovať pri úrokovej miere 7,2% p.a.

1. spôsob (porovnáme prítomné hodnoty):

$$K_n = 54\,000, \quad i = 0,072, \quad n = 1$$

Vypočítame súčasnú hodnotu sumy 54 000 p.j.

$$K_0 = \frac{K_n}{1+i \cdot n} = \frac{54\,000}{1+0,072 \cdot 1} = \frac{54\,000}{1,072} = 50\,373,13$$

Vidíme, že $K_0 > 50\,000$, teda ak zaplatíme o rok 54 000, je to ekvivalentné súčasnej platbe 50 373,13. Výhodnejšia je teda 1. možnosť, platiť hneď v hotovosti čiastku 50 000.

2. spôsob (porovnáme budúce hodnoty):

$$K_0 = 50\,000, \quad i = 0,072, \quad n = 1$$

$$K_n = K_0(1+in) = 50\,000(1+0,072 \cdot 1) = 53\,600$$

Ak uložíme teraz 50 000 p.j., získame o rok 53 600 p.j., čo je menej, než budeme o rok potrebovať. Preto je výhodnejšie hneď zaplatiť 50 000 (teda 1. možnosť)

Diskont je rozdiel medzi budúcou hodnotou kapitálu K_n a súčasnou hodnotou K_0

$$D = K_n - K_0$$

$$D = K_n - \frac{K_n}{1+in}$$

$$D = \frac{K_n + K_n in - K_n}{1+in}$$

$$D = \frac{K_n \cdot i \cdot n}{1+i \cdot n}$$

- vzorec pre **matematický diskont** $D = K_n \frac{in}{1+in}$

$$\text{Ak } K_n = 1, \quad n = 1 \Rightarrow D_1 = \frac{i}{1+i} = i \cdot \frac{1}{1+i}$$

Veličinu $v = \frac{1}{1+i}$ nazývame **diskontný faktor**.

Pr.13. Diskont z kapitálu 10212,50 p.j. pri 9%-ej ročnej úrokovej miere za 10 mesiacov je podľa vzorca $D = K_n \frac{in}{1+in} = 712,50$ p.j.
 $K_0 = K_n - D = 9500$ p.j.

Obchodný (bankový) diskont

Obchodný (bankový) diskont používame pri práci s krátkodobými cennými papiermi napr. zmenkami.

Zmenka je úverový platobný prostriedok, z ktorého vyplýva, že dlžník zaplatí veriteľovi k určenému dátumu (**dátum splatnosti zmenky**) sumu uvedenú na zmenke. Majiteľ môže pred dobou splatnosti zmenku predat' peňažnému ústavu, ktorý si okrem výloh zrazí úroky do doby splatnosti zmenky (diskont). Táto peňažná operácia sa nazýva **eskont zmenky**. Peňažný ústav môže opäť predat' zmenku napr. ústrednej banke - **reeskont zmenky**.

Diskont je teda „odmena“ odo dňa výplaty do dňa splatnosti pohľadávky.

Označme symbolom d diskontnú sadzbu.

- vzorec pre **obchodný diskont** $D = K_n \cdot d \cdot n$

Po zrážke obchodného diskontu bude vyplatená čiastka

$$K_0 = K_n - D$$

$$K_0 = K_n - K_n \cdot d \cdot n$$

$$K_0 = K_n (1 - dn)$$

- $K_0 = K_n (1 - dn) \Rightarrow K_n = \frac{K_0}{1 - dn}$

Princíp obchodného diskontu je zhodný s platením úroku na začiatku úrokového obdobia, ide teda o **predlehotné úrokovanie**.

Pr.14. Občan vlastní zmenku na 30 000 p.j. splatnú 30.6. Potrebuje peniaze už 25.3. Predá zmenku bankárovi. Bankár si za túto službu zrazí obchodný diskont pri ročnej diskontnej sadzbe $d = 0,09$. Akú sumu zaplatí 25.3. bankár občanovi?

Pr. 15. Finančná spoločnosť poskytuje na úvery 12%-nú ročnú diskontnú mieru. Klient N zobral pôžičku 1000 p.j. splatnú o 6 mesiacov. Akú sumu dostal klient N od finančnej spoločnosti ?

Pr. 16. Obchodník zaplatí svojmu dodávateľovi za tovar zmenkou na sumu 10 000 p.j. s dobou splatnosti 3 mesiace. Dodávateľ potrebuje peniaze okamžite, ponúkne zmenku svojej banke, ktorá ju odkúpi pri ročnej diskontnej sadzbe 6 %. Okrem toho si banka účtuje výlohy 0,5% z celkovej sumy. Koľko dostane za zmenku dodávateľ ? Koľko dostane k dátumu splatnosti banka od obchodníka ?

Porovnanie matematického a obchodného diskontu

Pr. 17. V zmluve sa predpokladá splatnosť dlhu 20 000 p.j. o 6 mesiacov. Zistite veľkosť matematického a obchodného diskontu zrazeného pri vyrovnaní dlhu teraz, ak predpokladáme rovnakú ročnú úrokovú a diskontnú mieru 12 %.

Všeobecne:

$$D_m = K_n \cdot \frac{i \cdot n}{1 + i \cdot n} \quad D_o = K_n \cdot d \cdot n$$

predpoklad: $i = d \Rightarrow D_o = K_n \cdot d \cdot n = K_n \cdot i \cdot n$

$$D_m = \frac{D_o}{1 + i \cdot n} \Rightarrow D_m(1 + i \cdot n) = D_o \cdot 1 \Rightarrow D_m < D_o$$

diskont matematický je menší ako diskont obchodný

Ekvivalentné úrokové a diskontné sadzby

Hovoríme, že úroková sadzba i a diskontná sadzba d sú **ekvivalentné**, ak pri tej istej splatnej hodnote K_n a rovnakom období n , dávajú tú istú prítomnú hodnotu,

$$K_0 = \frac{K_n}{1 + in} \quad \text{a} \quad K_0 = K_n(1 - dn).$$

Po úpravách dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{K_n}{1 + in} &= K_n(1 - dn) \Rightarrow \frac{1}{1 + in} = 1 - dn \\ \Rightarrow in &= \frac{1}{1 - dn} - 1 \Rightarrow in = \frac{1 - 1 + dn}{1 - dn} \\ \Rightarrow i &= \frac{d}{1 - dn} \Leftrightarrow d = \frac{i}{1 + in} \end{aligned}$$

Pr. 18. Banka diskontuje zmenku v nominálnej hodnote 10 000 p.j. splatnú o rok pri ročnej diskontnej miere 12 %. Akú veľkú úrokovú mieru tým banka poskytuje?

Pr. 19. Aby sme získali 11%-nú ročnú úrokovú mieru na 6-mesačnú pôžičku, akú veľkú ročnú diskontnú mieru nám má poskytnúť veriteľ?

1.4. PRINCÍP FINANČNEJ EKVIVALENCIE

V praxi je niekedy potrebné určitú finančnú povinnosť zameniť inou (napr. zmeniť dátum splatnosti zmenky, spojiť niekoľko finančných povinností a p.).

Použijeme princíp finančnej ekvivalencie:

Ekvivalentné sú také finančné operácie, ktoré dávajú k tomu istému dátumu rovnaké platby.

Zostavíme rovnicu ekvivalencie, v ktorej súčet známych platieb k danému dátumu sa porovnáva s novou neznámou platbou k tomu istému dátumu (porovnávací dátum).

Pr. 20. Dve zmenky v nominálnych hodnotách 9840 p.j. a 9900 p.j. sú splatné 10.8. a 9.9. pri 7,2%-nej diskontnej miere. Vypočítajte dátum ekvivalencie oboch zmeniek, t.j. dátum, pri ktorom majú rovnakú prítomnú hodnotu.

Pr. 21. Dlžník má zaplatiť veriteľovi dve dlžoby, jednu vo výške 1200 p.j. o 5 mesiacov, druhú vo výške 1500 p.j. o 9 mesiacov pri dohodnutej ročnej úrokovej miere 9%. Po čase si to rozmyslel a chce dlžoby zaplatiť jednou splátkou o 7 mesiacov. Aká vysoká bude táto platba ?

Pr. 22. Pri podmienkach príkladu 21 chce dlžník vyrovnať dlh dvoma rovnako veľkými splátkami po 3. a 6. mesiaci. Zistite veľkosť týchto splátok!