3.1. RENTOVÝ POČET

Renta – v širšom význame je výnos (peňažného) kapitálu, založenom na určitom majetku, napr. pozemková renta

Renta – v zúženom význame – *finančná renta* je postupnosť splátok v rovnako veľkých intervaloch.

Namiesto pojmu renta sa používa pojem **dôchodok**, alebo aj **anuita**.

S rentou sa stretávame pri -
- pravidelnom sporení
- umorení pôžičky
- vytvorení amortizačného fondu a pod.

Klasifikácia rient:

I) podľa podmienok splácania sú renty :
- *nepodmienené* (splátky nepodliehajú žiadnej podmienke, napr. splátky úveru)
- *podmienené* (výplata renty je viazaná podmienkou, napr. starobný dôchodok – podmienka je dožiť sa)

II) podľa počtu splátok
- *konečné renty*
- *nekonečné renty*

III) podľa veľkosti jednotlivých splátok
- *konštantné renty*
- *premenlivé renty*

IV) podľa dĺžky periódy medzi jednotlivými splátkami môže byť renta :
- *ročná*
- *polročná*
- *mesačná*
- *p – termínová* (*p* – číslo, ktoré vyjadruje počet splátok za 1 rok)

V) podľa momentu splácania
- *polehotná renta*
- *predlehotná renta*

(*časová*) *perióda renty* je dĺžka časového intervalu, na *konci* (alebo *začiatku*) ktorého sa uskutočňujú splátky

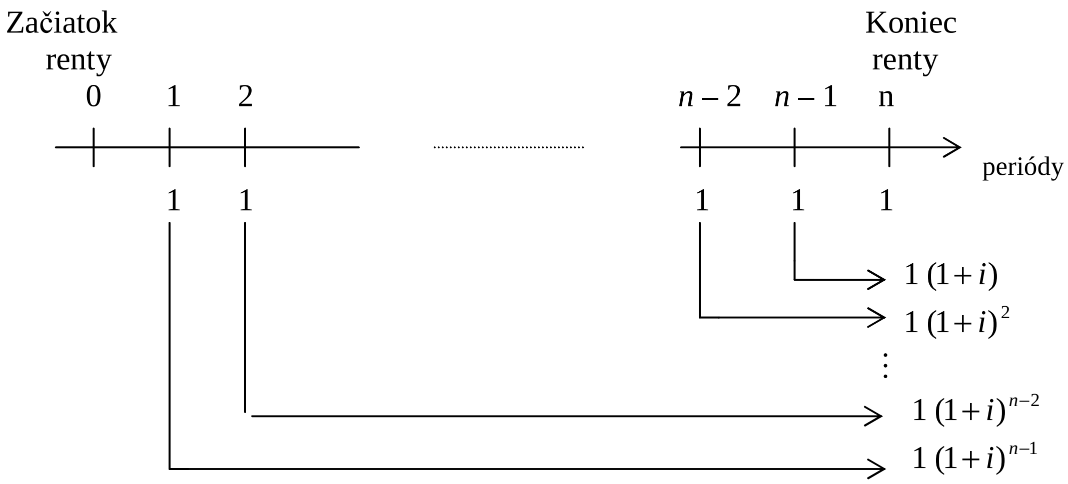
doba splatnosti renty je čas medzi prvou a poslednou splátkou

Symbolika :

n - počet splátok renty, počet časových periód
R - splátka za 1 časovú periódu, člen renty
i - úroková sadzba za 1 časovú periódu

3.2. POLEHOTNÁ RENTA

- budeme uvažovať jednotkovú, konštantnú, nepodmienenú, polehotnú rentu s n časovými splátkami, veľkosti 1, s úrokovou sadzbou i za 1 časovú periódu renty



- posledná, n-tá splátka sa nezúročí
  1., 2., až $(n-1)$-vá splátka sa zúročia

Odvodíme vzorec pre výpočet budúcej hodnoty renty s

$$s = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}$$

Výraz na pravej strane je súčet n členov geometrickej postupnosti

$$\left[\text{vzorec pre GP:} \quad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}\right]$$

$$q = 1+i \quad , \quad a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad s = 1 \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{1+i-1} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

polehotný sporiteľ

Uvažujeme teraz rentu, ktorej periodická splátka bude R. Pre budúcu hodnotu S dostaneme :

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

$$= R\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

- **budúca hodnota renty pri polehotnom platení**, s výškou splátky R,
  n periodických splátok, úroková sadzba i za 1 periódu

$$S = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s$$

Prítomná hodnota renty a s veľkosťou splátky $R = 1$ je rovná súčtu diskontovaných veličín všetkých členov renty k nejakému bodu v minulosti (zvyčajne k začiatku renty). Pri matematickom diskontovaní $i = d$, teda

$$a = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} = \upsilon + \upsilon^2 + \cdots + \upsilon^n =$$

$$= \upsilon \cdot \frac{\upsilon^n - 1}{\upsilon - 1} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{\frac{1-1-i}{1+i}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{-i} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} = \frac{1-\upsilon^n}{i}$$

prítomná hodnota $a = \dfrac{1-\upsilon^n}{i}$ polehotný zásobiteľ

- **prítomná hodnota renty** so splátkou R (renta je konštantná, polehotná s n splátkami, i – úroková sadzba)

$$A = R \cdot a = R\frac{1-\upsilon^n}{i} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Vzťah medzi prítomnou a budúcou hodnotou renty
- určíme z rovnive ekvivalencie :

Ak za bod porovnania zvolíme začiatok renty, platí
$A = S \cdot (1+i)^{-n}$ (finančná ekvivalencia)

Ak za bod porovnania zvolíme koniec renty, platí
$S = A \cdot (1+i)^n$ (finančná ekvivalencia)

Ak veľkosť splátky $R = 1$, tak dostávame vzťah pre "s" a "a"

$$s = a(1+i)^n$$

$$a = s(1+i)^{-n}$$

- veľkosť periodickej splátky R:

$$S = R \cdot s \quad \Rightarrow \quad R = S \cdot \frac{1}{s} = S \cdot \frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \Rightarrow R = S \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

- počet periód renty : $R = S \cdot \dfrac{i}{(1+i)^n - 1}$

$$R\left[(1+i)^n - 1\right] = S \cdot i$$

$$(1+i)^n = \frac{S\cdot i}{R}+1 \;\Rightarrow\; n\cdot\ln(1+i)=\ln\left(\frac{S\cdot i}{R}+1\right)$$

$$\Rightarrow\quad n=\frac{\ln\left(\frac{S\cdot i}{R}+1\right)}{\ln(1+i)}$$

P o z n á m k a . n je zvyčajne desatinné číslo, teda n zaokrúhlime nadol na celé číslo a poslednú splátku určíme osobitne.

- veľkosť periodickej splátky R (určíme z A)

$$A=R\cdot a=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{A\cdot i}{1-(1+i)^{-n}}=R$$

- **počet periód renty** :

$$\frac{R}{A}=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\quad\Rightarrow\;1-(1+i)^{-n}=\frac{A\cdot i}{R}\quad\Rightarrow\quad 1-\frac{A\cdot i}{R}=(1+i)^{-n}$$

$$\Rightarrow\quad\ln\left(1-\frac{A\cdot i}{R}\right)=-n\cdot\ln(1+i)\quad\Rightarrow\quad n=\frac{\ln\left(1-\frac{A\cdot i}{R}\right)}{-\ln(1+i)}$$

$$\Rightarrow\qquad n=\frac{\ln\left(1-\frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$$

definičný obor : $\left(1-\frac{A\cdot i}{R}\right)>0\quad\Leftrightarrow\quad 1>\frac{A\cdot i}{R}\quad\Leftrightarrow\quad R>A\cdot i$

ak $\quad R\to A\cdot i\;\Rightarrow\;n\to\infty$ (ide o večnú rentu)

PRÍKLADY

Pr.3.1. Žena ukladá do banky 5 000 p.j. koncom každého roka na vklad, ktorý poskytuje 8%-nú ročnú úrokovú mieru. Aká suma sa jej nahromadí na účte po 8. rokoch?

Pr.3.2. Pri 10-tom roku dieťaťa otec založil viazaný vklad, na ktorý prispieva koncom každého mesiaca sumou 100 p.j. Banka poskytuje na vklad mesačné úroky pri nominálnej úrokovej sadzbe 0,06. Akú sumu dostane dieťa pri dovŕšení 21. roku?

Pr.3.3. Riaditeľstvo spoločnosti chce založiť fond, z ktorého chce zabezpečiť platbu pomocného účtovníka v sume 3 000 p.j. za mesiac počas nasledujúcich 5 rokov. Prvá splátka má byť o mesiac od teraz. Koľko treba vložiť do fondu, ktorý poskytuje mesačný úrok pri 7%-nej nominálnej úrokovej miere?

Pr.3.4. Pán Hladký sa dohodol s p. Novákom, že vyrovná dlžobu piatimi splátkami po 5 000 p.j. koncom každého nasledujúceho roku pri 7%-nej ročnej úrokovej miere. Pán Hladký nemohol zaplatiť prvú splátku , preto sa dohodol s p. Novákom, že celú dlžobu vyrovná jednou ekvivalentnou splátkou, a to:

a) na konci 3. roka,

b) na konci 6. roka .

Koľko zaplatí ?

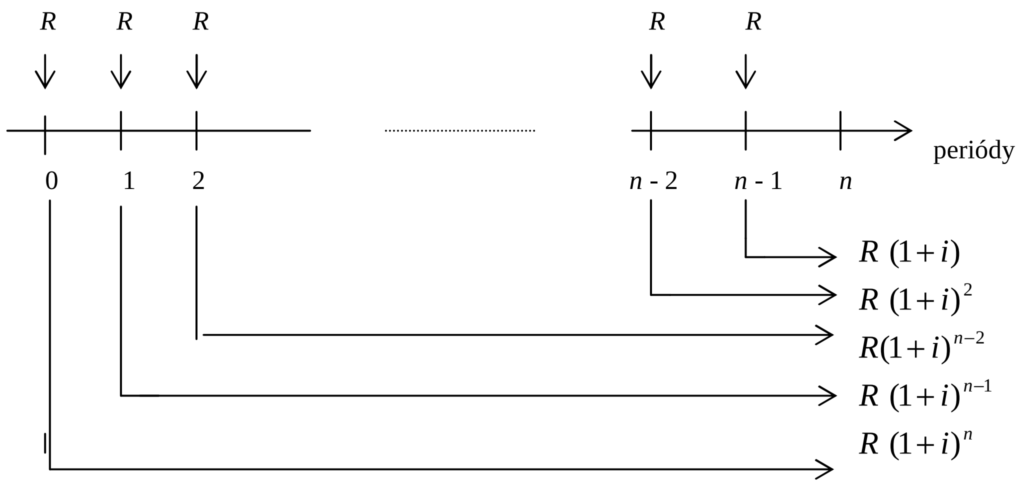
Pr. 3.5. Spoločnosť chce akumulovať 1 milión p.j. na kúpu stroja za 8 rokov od teraz. Kvôli tomu vytvorí zabezpečovací fond, do ktorého vkladá pravidelné polročné splátky. Fond poskytuje polročné úroky pri 7%-nej nominálnej úrokovej miere. Určte veľkosť každej splátky.

Pr. 3.6. Koľko rokov možno vyberať z vkladu 50 000 p.j. koncom každého roka sumu 8 000 p.j., ak je vklad vložený pri 12%-nej ročnej úrokovej miere?

3.3. PREDLEHOTNÁ RENTA

- splátky sa uskutočňujú na začiatku každej periódy

Uvažujme konštantnú, nepodmienenú, predlehotnú rentu s n konštantnými splátkami veľkosti R, s úrokovou sadzbou i za 1 časovú periódu



- budúca hodnota renty $\dot{S} = R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n$

$$= R(1+i)\left[1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$= R(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R\cdot(1+i)\cdot s$$

$$\dot{S} = R(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Platí $\dot{S} = (1+i)\cdot S$

➥ budúca hodnota polehotnej renty

➥ budúca hodnota predlehotnej renty

Ak veľkosť splátky $R=1$, tak

$$\dot{s}=(1+i)\cdot s \quad \Rightarrow \quad \dot{s}=(1+i)\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

- **prítomná hodnota predlehotnej renty**

$$\dot{A}=R(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{A}=(1+i)\cdot A$$

Ak $R=1$

$$\dot{a}=(1+i)\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=(1+i)\cdot\frac{1-\upsilon^n}{i}$$

- **veľkosť periodickej splátky *R* a počet períód predlehotnej renty *n*** :

$$R=\dot{S}\cdot\frac{1}{1+i}\cdot\frac{i}{(1+i)^n-1} \qquad n=\frac{\ln\left(\frac{\dot{S}\cdot i}{R(1+i)}+1\right)}{\ln(1+i)}$$

$$R=\dot{A}\cdot\frac{1}{1+i}\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad n=\frac{\ln\left(1-\frac{\dot{A}\cdot i}{R(1+i)}\right)^{-1}}{\ln(1+i)}$$

PRÍKLADY

Pr. 3.7. Jeden z bratov musí druhému vrátiť dedičský podiel z domu v sume 500 000p.j. za 6 rokov. Koľko musí vložiť začiatkom každého roka na účet v banke, aby našetril túto sumu pri ročnej úrokovej miere 6% ?

Pr. 3.8. Ak uvažujeme o štvrťročnom úrokovaní pri 8%-nej nominálnej úrokovej miere, ako dlho musíme vkladať začiatkom každého štvrťroka sumu 500 p.j., aby sa nám na účte naakumuloval kapitál 10 000p.j.?

3.4. VEČNÁ RENTA

Večná renta je renta, ktorej počet splátok (počet členov) nie je ohraničený, napr. pravidelný výber úrokov z určitého fondu
Počet splátok $n\to\infty$

Veličiny večnej renty môžeme odvodiť zo zodpovedajúcich veličín polehotnej alebo predlehotnej renty pomocou limity.

Budúca hodnota večnej renty

$$S_\infty=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}=R\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(1+i)^n-1}{i}=R\cdot\infty=\infty$$

Platí $\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)^n=\infty$

Prítomná hodnota večnej renty

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{(1+i)^n}) = \frac{R}{i}\cdot 1 = \frac{R}{i} \qquad \Rightarrow \qquad A_\infty = \frac{R}{i}$$

3.5. RENTA VYPLÁCANÁ *p* – KRÁT ROČNE – POLEHOTNÁ

Pr. 3.9. Renta sa spláca 4-krát ročne konštantnými splátkami rovnými 400 p.j., úrokovanie je polročné s nominálnou úrokovou mierou 5 %. Určite budúcu hodnotu renty po 6 rokoch.

Pr. 3.10. Darca chce poskytnúť na rozvoj základnej školy 2-krát do roka sumu 10 000 Sk počas nasledujúcich 5 rokov s prvým pridelením o 1 rok. Darca založil na tento účel v banke nadačný fond, ktorý poskytuje štvrťročný úrok pri 8 % - nej nominálnej úrokovej miere. Akú sumu v skutočnosti poskytol darca škole?