

Pravidlá umorovania

Dlžník na konci p -tej periódy vracia časť dlhu (dlh umoruje) umorovacou splátkou Q_p , ale spláca aj dohodnutý úrok $D_{p-1} \cdot g$ zo zvyšku dlhu (aký bol na začiatku p -tej periódy, t.j. D_{p-1}).

Umorovacia splátka spolu s úrokmi dávajú celkovú periodickú splátku A_p :

umorovacia splátka	Q_1	Q_2	$\dots Q_{n-1}$	Q_n
splátka úrokov	Dg	D_1g	$\dots D_{n-2}g$	$D_{n-1}g$
anuita	A_1	A_2	$\dots A_{n-1}$	A_n
	↓	↓	↓	↓
	0	1	2	$n-1$
				n
zostatok	D	D_1	D_2	$\dots D_{n-1}$
dlhu				D_n

Rekurentné vzťahy pre veličiny A_p , D_p

$$A_p = Q_p + D_{p-1}g \quad , \quad p = 1, \dots, n$$

$$D_p = D_{p-1} - Q_p, \quad \text{kde } D_0 = D$$

Rovnica ekvivalencie v bode $t = 0$ pre sumu D má tvar

$$D = A_1(1+g)^{-1} + A_2(1+g)^{-2} + \dots + A_{n-1}(1+g)^{-(n-1)} + A_n(1+g)^{-n} \quad (\text{I})$$

Pravidlo 1.

Veľkosť dlhu (pôžičky) sa rovná súčtu prítomných hodnôt všetkých anuit (vyjadrené rovnicou (I)).

Ak rovnicu (I) vynásobíme výrazom $(1+g)^n$, dostaneme

$$D(1+g)^n = A_1(1+g)^{n-1} + A_2(1+g)^{n-2} + \dots + A_{n-1}(1+g) + A_n \quad (\text{II})$$

Pravidlo 2.

Budúca hodnota dlhu $D(1+g)^n$ na konci n -tej periódy sa rovná súčtu nadobudnutých hodnôt anuit k tomu istému času (vyjadrené rovnicou (II)).

Ak napíšeme rovnicu ekvivalencie v bode $t = p$, platí

$$D_p = D(1+g)^p - \left[A_1(1+g)^{p-1} + \dots + A_{p-1}(1+g) + A_p \right] \quad (\text{III})$$

Pravidlo 3.

Zostatok dlhu D_p po zaplatení p -tej anuity sa rovná rozdielu medzi budúcou hodnotou pôžičky na konci p -tej periódy a

súčtom budúcich hodnôt prvých p anuít k tomuto času (vyjadrené rovnicou (III)).

resp.

$$D_p = A_{p+1}(1+g)^{-1} + \dots + A_n(1+g)^{p-n} \quad (\text{IV})$$

Pravidlo 4.

Zostatok dlhu D_p po zaplatení p -tej anuity sa rovná súčtu prítomných hodnôt zostávajúcich $n - p$ anuít k tomuto času (vyjadrené rovnicou (IV)).

M1 Anuitné umorovanie

Počas celej doby umorovania sa splácajú konštantné periodické splátky:

$$A_p = A = \text{const} \quad , \quad p = 1, \dots, n$$

Časť splátky ide na umorovanie dlhu a časť na splácanie úrokov pôžičky.

a) **veľkosť anuity** - je to konštantná renta

prítomná hodnota renty bude $A_n = D$, $R = A$, $i = g$

$$A = D \frac{g}{1 - (1 + g)^{-n}}$$

b) **umorovacie splátky**

Ak je pôžička umorená konštantnými anuitami, tak zodpovedajúce umorovacie splátky tvoria geometrickú postupnosť (je možné to odvodiť)

$$Q_{p+1} = Q_p (1 + g)$$

resp. $Q_p = Q_1 (1 + g)^{p-1}$, $1 + g$ je kvocient

c) **prvé umorenie**: dlh $D = \underbrace{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}_{\downarrow}$

je súčtom umorovacích splátok, platí

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1 + g)^n - 1}{g} \quad - \text{ súčet geometrickej postupnosti}$$

$\Downarrow$

$$\text{1. člen} \quad Q_1 = D \cdot \frac{g}{(1 + g)^n - 1}$$

d) rekurentné vzťahy :

$$\text{umorovacie splátky} \quad Q_p = Q_{p-1}(1 + g)$$

$$\text{zostatok dlhu} \quad D_p = D_{p-1} - Q_p$$

$$\text{splátka úrokov} \quad u_p = D_{p-1} \cdot g$$

e) umorovací plán

Periódá	Dlh na začiatku periódy	Úroky za periódu	Umorovacia splátka	Anuita
$t = 1$	$D_0 = D$	Dg	Q_1	$A = Dg + Q_1$
2	$D_1 = D - Q_1$	D_1g	$Q_2 = Q_1(1 + g)$	$A = D_1g + Q_2$
$\vdots$				
t	$D_{t-1} = D_{t-2} - Q_{t-1}$	$D_{t-1}g$	$Q_t = Q_{t-1}(1 + g)$	$A = D_{t-1}g + Q_t$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Súčet			D	

Tab. 3

Príklad 4.3.

Dlh v sume 50 000 p.j. je vydaný pri 4%-nej ročnej úrokovej miere a musí byť vrátený o 6 rokov. Zostavte umorovací plán, za predpokladu konštantných ročných anuit.

$$\text{Riešenie:} \quad D = 50\,000 \quad , \quad g = 0,04 \quad n = 6$$

$$A = D \cdot \frac{g}{1 - (1 + g)^{-n}} = 50\,000 \cdot \frac{0,04}{1 - (1,04)^{-6}} = 9\,538,10$$

$$Q_1 = D \cdot \frac{g}{(1+g)^n - 1} = 50\,000 \cdot \frac{0,04}{(1,04)^6 - 1} = 7\,538,10$$

UMOROVACÍ PLÁN (anuitné umorovanie)

Periód t	Zostatok dlhu Na začiatku periódy D_{t-1}	Splátky na pôžičku Q_t	Výplata úrokov $D_{t-1} \cdot \frac{g}{m}$	Anuita A
1	50 000,00	7 538,10	2 000,00	9 538,10
2	42 461,90	7 839,62	1 698,48	9 538,10
3	34 622,29	8 153,20	1 384,89	9 538,10
4	26 469,08	8 479,33	1 058,76	9 538,10
5	17 989,75	8 818,51	719,59	9 538,10
6	9 171,25	9 171,25	366,85	9 538,10
		50 000,00	7 228,57	57 228,57

Tab. 4

M2 Splátkové umorovanie

Predpokladáme konštantné umorovacie splátky, teda

$$Q_p = Q = \text{const} \quad , \quad p = 1, \dots, n$$

a) veľkosť umorovacej splátky

n periodických splátok pre dlh D , teda každá umorovacia

splátka bude $Q = \frac{D}{n}$

b) zostatok dlhu na konci p -tej periódy

$$D_p = D_{p-1} - \frac{D}{n} \quad , \quad p = 1, \dots, n$$

Zostatky dlhu tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť, ktorej

prvý člen je $D_1 = D - \frac{D}{n}$,

diferencia je $-\frac{D}{n}$,

p -ty člen je $D_p = D - p \cdot \frac{D}{n}$; $p = 1, \dots, n$.

c) **splátka úrokov** na konci p -tej periódy

$$u_p = D_{p-1} \cdot g \quad \text{alebo} \quad u_p = \left[D - (p-1) \cdot \frac{D}{n} \right] \cdot g$$

$$u_p = Dg - (p-1) \cdot \frac{D}{n} \cdot g$$

Splátky úrokov $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť, ktorej

prvý člen je $u_1 = Dg$

a diferencia je $-\frac{D}{n}g$

d) **veľkosť anuity**

$$A_p = Q + u_p \quad (\text{konšt.})$$

$$A_p = \overbrace{\frac{D}{n} + D \cdot g - (p-1) \cdot \frac{D}{n} \cdot g}^{Q+u_p},$$

anuity $A_1, A_2, \dots, A_n$ tvoria klesajúcu aritmetickú

postupnosť, ktorej prvý člen je $A_1 = \frac{D}{n} + D \cdot g$ a diferencia

je $-\frac{D}{n} \cdot g$

e) umorovací plán

Periód t	Zostatok dlhu na začiatku periód D_{t-1}	Úroky za periód $D_{t-1}g$	Umorovacia Splátka Q	Anuita A_t	Zostatok dlhu na konci periód D_t
1	$D_0 = D$	Dg	$\frac{D}{n}$	$A_1 = \frac{D}{n} + Dg$	$D_1 = D - \frac{D}{n}$
2	D_1	D_1g	$\frac{D}{n}$	$A_2 = \frac{D}{n} + D_1g$	$D_2 = D_1 - \frac{D}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p	D_{p-1}	$D_{p-1}g$	$\frac{D}{n}$	$A_p = \frac{D}{n} + D_{p-1}g$	$D_p = D_{p-1} - \frac{D}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	D_{n-1}	$D_{n-1}g$	$\frac{D}{n}$	$A_n = \frac{D}{n} + D_{n-1}g$	0
		$\Sigma =$	$\Sigma = D$	$\Sigma =$	

Tab. 5

Príklad 4.4.

Dlh v sume 50 000 p.j. je vydaný pri 4%-nej ročnej úrokovej miere a musí byť vrátený o 6 rokov. Zostavte umorovací plán za predpokladu konštantných ročných umorovacích splátok.

Riešenie:

$$D = 50\,000 \quad ; \quad g = 0,04 \quad ; \quad Q = \frac{D}{n} = \frac{50\,000}{6} = 8\,333,33$$

UMOROVACÍ PLÁN (splátkové umorovanie)

Periód t	Zostatok dlhu na začiatku periód D_{t-1}	Úroky za periód $D_{t-1}g$	Umorovacia Splátka Q_t	Anuita A_t	Zostatok dlhu na konci periód D_t
1	50 000,00	2 000,00	8 333,33	10 333,33	41 666,67
2	41 666,67	1 666,67	8 333,33	10 000,00	33 333,33
3	33 333,33	1 333,33	8 333,33	9 666,67	25 000,00
4	25 000,00	1 000,00	8 333,33	9 333,33	16 666,67
5	16 666,67	666,67	8 333,33	9 000,00	8 333,33
6	8 333,33	333,33	8 333,33	8 666,67	0,00
		7 000,00	50 000,00	57 000,00	

Tab. 6