

Cvičenie 1, Príklad 3:

Úlohou je pomocou Gretlu, prípadne iného štatistického softvéru odhadnúť Cobb-Douglasovu funkciu a vhodne zinterpretovať dosiahnuté výsledky. V excelovskom súbore boli uvedené údaje o 50 štátoch USA a Washington DC (prierezové údaje) za rok 2005 pre nasledujúce premenné:

Output – meraný pomocou pridanej hodnoty v tis. dolárov

Input práca – hodiny práce v stovkách

Input kapitál – kapitálové výdaje v tis. dolárov

Teória:

Budeme uvažovať o Cobbovej-Douglasovej funkcii v nasledujúcom tvare:

$$Q_i = B_1 L_i^{B_2} K_i^{B_3} \quad (1)$$

Kde Q-output, L-input práca, K-kapitál a B_1 je konštanta. (ďalšie informácie o Cobb-Douglasovej produkčnej funkcii nájdete v ktorejkoľvek učebnici mikroekonómie). Uvedený model je nelineárny v parametroch a jeho odhad by si vyžadoval použitie nelineárnych metód. Jednoduchším spôsobom je linearizácia modelu pomocou zlogaritmovania uvedenej funkcie, čím dostaneme tvar:

$$\ln Q_i = \ln B_1 + B_2 \ln L_i + B_3 \ln K_i \quad (2)$$

Ak $\ln B_1$ zapíšeme ako A, a do rovnice pridáme náhodnú chybu u_i , dostaneme nasledujúci lineárny regresný model ktorý je lineárny v parametroch A, B_2 a B_3 a nelineárny v premenných Q, L a K.

$$\ln Q_i = A + B_2 \ln L_i + B_3 \ln K_i + u_i \quad (3)$$

Všimnite si, že $A = \ln B_1$. Teda $B_1 = \text{antilog}(A)$ čo je nelineárne. Hoci pri väčšine aplikácii lokujúca konštanta nemá použiteľnú ekonomickú interpretáciu. Model v tomto tvare je často označovaný ako log-log, double-log alebo model s konštantnou elasticitou, pretože vysvetľované aj vysvetľujúce premenné sú v logaritmickom tvare. Zaujímavou vlastnosťou tohto modelu je, že odhadnuté regresné koeficienty je možné interpretovať ako elasticity. Jednoducho povedané, elasticita je pomer percentuálnej zmeny v jednej premennej k percentuálnej zmene v inej premennej. Napríklad regresný koeficient B_2 je elasticita výstupu vzhľadom na input práce. To znamená pomer percentuálnej zmeny vo výstupe k percentuálnej zmene v inpute práce (ceteris paribus, úroveň ostatných premenných, v tomto prípade kapitálu, zostáva rovnaká). Odhadnutý regresný koeficient B_2 tak bude hovoriť, o koľko percent sa zmení výstup (Q) ak sa input práce (L) zmení o jedno percento.

Keďže odhadnuté elasticity sú konštanté pre všetky pozorovania, tento model sa tiež nazýva aj modelom s konštantnou elasticitou. Výhodou elasticít je, že sú zbavené jednotiek v ktorých sú merané jednotlivé premenné (ako napr. doláre či hodiny práce) pretože sú pomerom percentuálnych zmien.

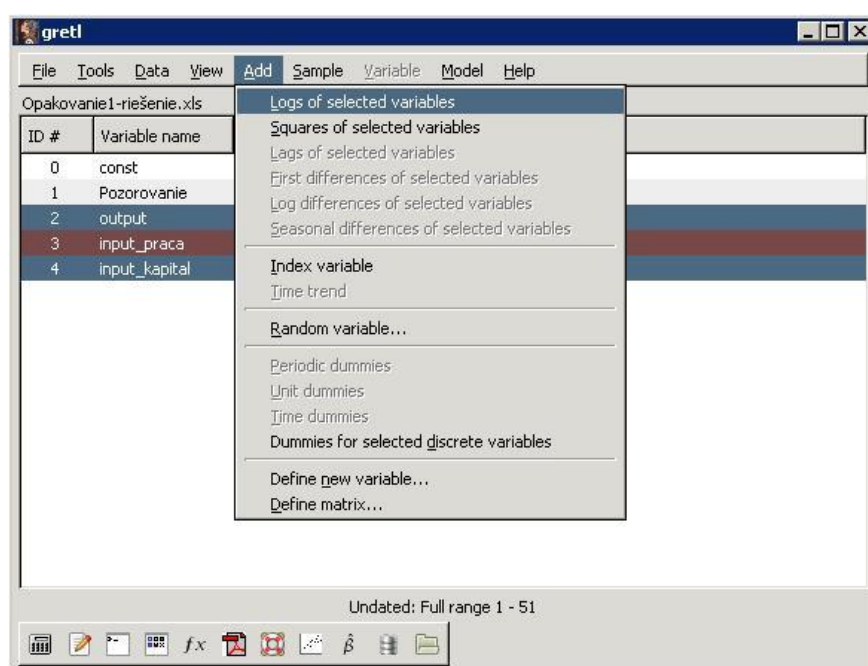
Ďalšou zaujímavou vlastnosťou Cobb-Douglasovej funkcie je, že suma dohadnutých regresných koeficientov ($B_2 + B_3$) o oblasti výnosov z rozsahu v ktorej sa nachádzame, teda reakcie outputu na proporcionálnu zmenu inputu. Pokiaľ je táto suma rovná jednej jedná sa o konštantné výnosy

z rozsahu, teda zdvojnásobením vstupov sa zdvojnásobí aj výstup. Pokiaľ je táto suma menej ako jedna, jedná sa o oblasť klesajúcich výnosov z rozsahu, t.j. zdvojnásobením vstupov sa výstup zvýši o menej ako dvojnásobok. Ak je suma vyššia ako jedna jedná sa o rastúce výnosy z rozsahu, t.j. zdvojnásobením vstupov sa výstup zvýši viac ako dvakrát.

Riešenie:

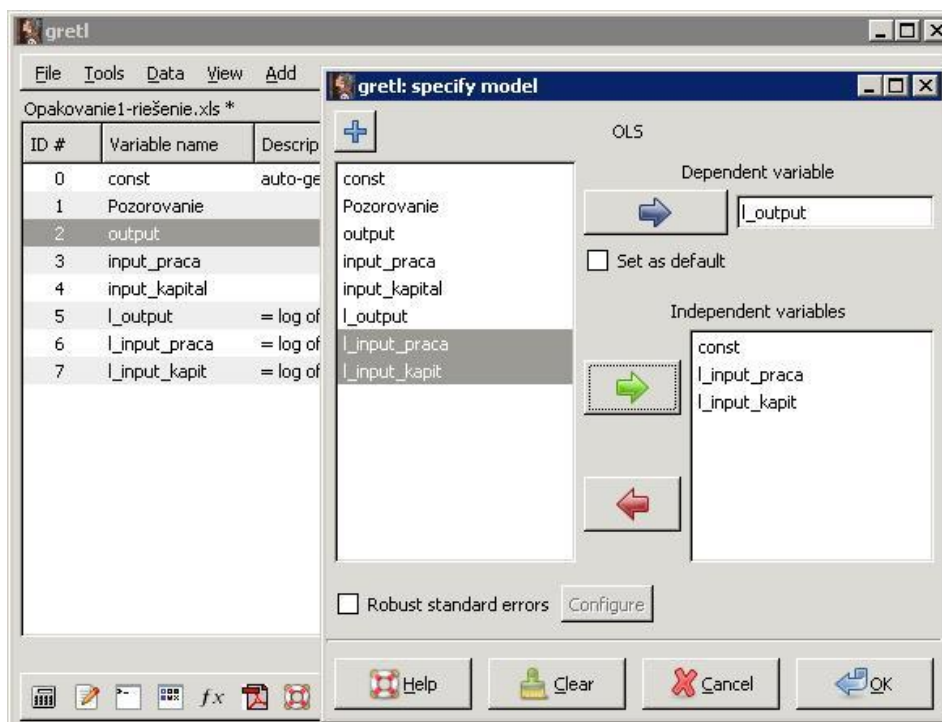
Úlohu budeme riešiť pomocou programu Gretl. V prvom kroku si nainportujeme údaje s ktorými chceme pracovať Excelovského súboru do Gretlu. Ak sa nám to podarilo mal by nám Gretl v úvodnom okne zobrazovať nainportované premenné.

Keďže premenné máme nainportované v pôvodnom tvare tak ako boli v Excelovskom súbore a chceme odhadnúť Cobb-Douglasovu funkciu, musíme pred tým ako odhadneme samotný model všetky premenné zlogaritmovať. V Gretli to urobíme jednoducho. Najprv vyznačíme všetky premenné ktoré chceme zlogaritmovať a potom na hornej lište vyberieme možnosť Add-> Logs of selected variables a následne nám pribudnú tri premenné ktoré sú prirodzeným logaritmom pôvodných označených premenných tak ako je to na obrázku 1. Túto voľbu v menu používame aj v prípade iných modifikácii premenných, napríklad vytváranie diferencií, sezónnych diferencií, či časovo posunutých premenných. Takto môžeme pracovať s údajmi bez toho, aby sme si premenné pred nainportovaním modifikovali manuálne v exceli.



Obrázok 1: Pridávanie zlogaritmovaných premenných

Pre odhad modelu v logaritmickej tvare ako je uvedené v rovnici (3) vyberieme v hornom menu možnosť Model a keďže chceme použiť klasickú metódu najmenších štvorcov zvolíme Ordinary Least Squares. Ako vysvetľovanú premennú vyberieme $\ln_output$, vysvetľujúce premenné budú $\ln_input_praca$ a $\ln_input_kapital$, model odhadujeme s konštantou tak v oblasti vysvetľujúcich premenných necháme zaradenú aj konštantu (const). Voľba premenných modelu je na obrázku 2.



Obrázok 2: Špecifikácia modelu Cobb-Douglasovej funkcie v Gretli

Po potvrdení zvolenej špecifikácie modelu dostaneme nasledujúci výstup z regresie v Gretli:

Model 1: OLS, using observations 1-51
Dependent variable: l_output

	<i>Coefficient</i>	<i>Std. Error</i>	<i>t-ratio</i>	<i>p-value</i>	
const	3,8876	0,396228	9,8115	<0,00001	***
l_input_praca	0,468332	0,0989259	4,7342	0,00002	***
l_input_kapit	0,521279	0,0968871	5,3803	<0,00001	***
Mean dependent var	16,94139	S.D. dependent var	1,380870		
Sum squared resid	3,415520	S.E. of regression	0,266752		
R-squared	0,964175	Adjusted R-squared	0,962683		
F(2, 48)	645,9311	P-value(F)	2,00e-35		
Log-likelihood	-3,426721	Akaike criterion	12,85344		
Schwarz criterion	18,64892	Hannan-Quinn	15,06807		

Ako prvé si všimneme že všetky odhadnuté regresné koeficienty sú štatisticky vysoko významné, pretože p-value je vo všetkých troch prípadoch nižšie ako 0,05 (vysoká štatistická významnosť je v Gretli tiež vyznačená tromi hviezdikami). Model ako celok je tiež štatisticky vysoko významný, keďže P-valu (F) je 2,00e-35, teda tiež nižšie ako 0,05 (číslo 2,00e-35 označuje 2 krát desať na mínus tridsiatu piatu, čo označuje veľmi nízke desatinné číslo s 35 desatinnými miestami). Koeficient determinácie (R-squared) má hodnotu 0,964175, teda model vysvetľuje 96% variability závisle premennej. Je to dosť vysoká hodnota na to, že sa jedná o prierezové údaje zahŕňajúce rôznorodé štáty. Odhadnutú rovnicu môžeme zapísať nasledovne:

$$\ln Q_i = 3,8876 + 0,468332 \ln L_i + 0,521279 \ln K_i + u_i \quad (4)$$

Odhadnuté regresné koeficienty sú zároveň elasticitami (interpretujeme ich v percentách). Interpretácia koeficientu 0,468332 pri $\ln L_i$ je nasledovná. Ak zvýšime množstvo inputu práce o 1%, output sa zvýši v priemere o 0,47% (ceteris paribus, teda kapitál zostane konštantný). Podobne, ak zvýšime množstvo inputu kapitálu o 1%, output sa zvýši v priemere o 0,52%. Môžeme z toho usúdiť že percentuálny nárast v inpute kapitálu prispieva k zvýšeniu outputu viac ako percentuálny nárast inputu práce. Suma týchto koeficientov (0,47+0,52) je približne 0,9896, teda Cobb-Douglasova produkčná funkcia Spojených štátov v roku 2005 bola charakterizovaná konštantnými výnosmi z rozsahu. Ak by sme chceli prepísať funkciu do pôvodného tvaru Cobb-Douglasovej funkcie (1), musíme brať do úvahy že odhadnutá lokujúca konštanta v modeli 3,8876 je vlastne $\ln B_1$ z pôvodnej rovnice. Preto je potrebné ju pred samotným zápisom pôvodnej rovnice odlogaritmovať. (teda, $3,8876 = \ln B_1$, pre odlogaritmovanie môžeme napr. použiť v exceli funkciu =exp(3,8876) z čoho zistíme že $B_1 = 48,79$). Zápis Cobb-Douglasovej produkčnej funkcie tak bude mať tvar:

$$Q_i = 48,79 L_i^{0,47} K_i^{0,51} \quad (5)$$

Kedže sme pri odhade modelu používali prierezné údaje, a jednotlivé štáty ktoré sme sledovali sa od seba významne líšia, je možné že sa v modeli bude vyskytovať Heteroskedasticita, ale tomu sa budeme bližšie venovať neskôr. Odhadnutý model by sme mohli porovnať s obyčajným lineárnym modelom bez logaritmovaných premenných. Rozhodnúť o tom ktorý model je lepší by však bolo zložitejšie, keďže v uvedených modeloch bola použitá rozdielna vysvetľovaná premenná (v lineárnom pôvodná premenná, v modeli (5) premenná v logaritmickej tvare. Použitie klasického R-squared by v tomto prípade nebolo vhodné. Ako postupovať v podobnom prípade si ukážeme neskôr.