KAPITOLA 7

ANALÝZA PORTFOLIA

Předcházející kapitola uvedla problém, se kterým se setkává každý investor. Uvedla také přístup k investování Harryho Markowitze jako metodu řešení tohoto problému. Při tomto přístupu by měl investor hodnotit alternativní portfolia na základě jejich očekávaných výnosností a směrodatných odchylek s použitím křivek indiference. V případě investora s odporem k riziku bude pro investování vybráno portfolio ležící na křivce indiference, která je umístěna „nejvýše vlevo".

Předchozí kapitola však nechala některé otázky nezodpovězeny. A to zejména, jak může být Markowitzův přístup použit v případě, že pro investování je k dispozici nekonečné množství portfolií? Co se stane, když investor uvažuje o investování do množiny cenných papírů, z nichž jeden je bezrizikový? Co se stane, když investor bude smět nakoupit některé cenné papíry na úvěr? Tato kapitola poskytne odpovědi na kladené otázky a začne odpovědí na první otázku.

7.1 VĚTA O EFEKTIVNÍ MNOŽINĚ

Jak bylo již dříve řečeno, z množiny *N* cenných papírů může být vytvořen nekonečný počet portfolií. Uvažujme situaci společností Able, Baker a Charlie, kde *N* je rovno 3. Investor by si mohl koupit buď jen akcie Able nebo jen Baker. Alternativně by si mohl koupit kombinaci akcií Able a Baker. Například by mohl vložit 50% svých peněz do každé společnosti, nebo 25% do jedné a 75% do druhé, případně 33% do jedné a 67% do druhé, nebo libovolné procento (mezi 0% a 100%) do jedné společnosti a zbytek do druhé. Již bez uvažování investice do Charlie dostáváme nekonečný počet možných portfolií, do kterých můžeme investovat.[1]

Musí investor vyhodnocovat všechna tato portfolia? Naštěstí je odpověď na tuto otázku záporná. Klíč k tomu, proč se musí investor zajímat jen o podmnožinu dostupných portfolií, leží ve *větě o efektivní množině*, která říká, že:

Investor si vybere své optimální portfolio z množiny portfolií, která:
1. nabízejí maximální očekávanou výnosnost při různých úrovních rizika a
2. nabízejí minimální riziko při různých úrovních očekávané výnosnosti.

Množina portfolií, která splňují tyto dvě podmínky, je známa jako *efektivní množina* nebo *efektivní hranice*.

[1] Je to vidět z toho, že na reálné číselné ose existuje mezi 0 a 100 nekonečně mnoho bodů. Kdyby tyto body reprezentovaly procento investorových fondů věnovaných na akcie Able a 100 minus toto číslo procento věnované na akcie Baker, potom je vidět, že i takových portfolií vytvořených pouze ze dvou různých cenných papírů je nekonečně mnoho. Při této úvaze jsme však předpokládali, že investor může koupit i zlomek akcie, jestliže si to přeje. Investor například může zakoupit nejen jednu, dvě nebo tři akcie, ale také 1,1 , 1,01 nebo 1,001 akcie.

☐ 7.1.1 Přípustná množina

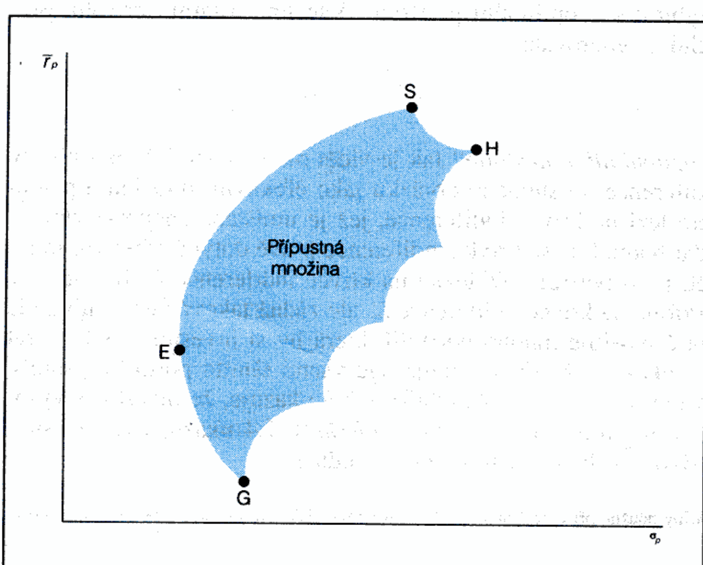
Obrázek 7.1 ilustruje umístění *přípustné množiny*, známé také jako množina příležitostí, ze které se potom vybírá efektivní množina. Přípustná množina jednoduše reprezentuje množinu všech portfolií, která mohou být vytvořena ze skupiny *N* cenných papírů. Všechna možná portfolia, která mohou být vytvořena z *N* cenných papírů, leží buď na nebo uvnitř hranice přípustné množiny (body označené *G*, *E*, *S* a *H* na obrázku jsou příkladem takových portfolií). Obecně bude mít tato množina tvar deštníku podobný tomu, který je zobrazen na obrázku. V závislosti na jednotlivých cenných papírech, které jsou v portfoliu zastoupeny, může ležet trochu vpravo nebo vlevo, výše nebo níže, případně může být štíhlejší nebo tlustší. Důležité je, že až na zvrácené případy, bude tato množina vždy vypadat tak, jak je ukázáno na obrázku.

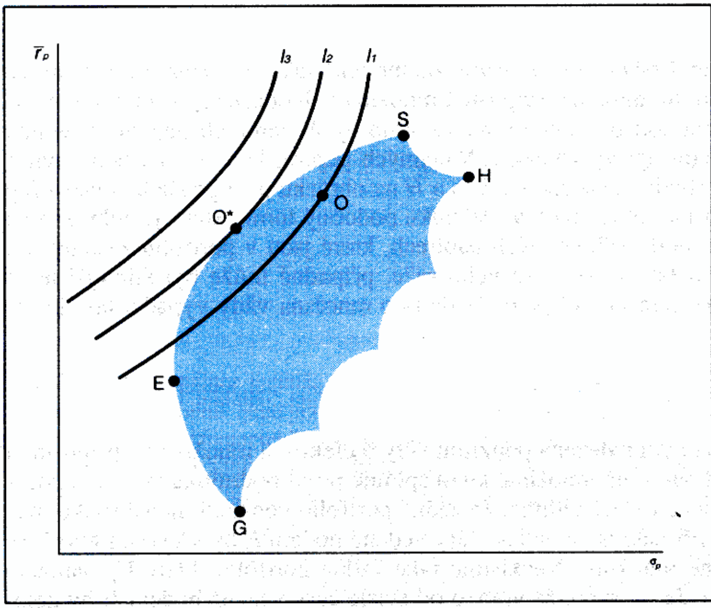
☐ 7.1.2 Aplikace věty o efektivní množině na přípustnou množinu

Efektivní množina může být nyní nalezena použitím věty o efektivní množině na přípustnou množinu. Nejprve musí být nalezena množina, která splňuje první podmínku věty o efektivní množině. Pohledem na obrázek 7.1 vidíme, že žádné portfolio nenabízí menší riziko, než portfolio *E*. Je to proto, že při nakreslení svislé čáry vedené bodem *E* by vlevo od této čáry neležel žádný bod přípustné množiny. Neexistuje také žádné portfolio, které by nabízelo vyšší riziko než portfolio *H*. Je to proto, že vpravo od svislé čáry vedené bodem *H* by neležel žádný bod přípustné množiny. Množina portfolií, která nabízejí maximální výnosnost při různých úrovních rizika, je tedy množina portfolií, která leží na „horní" hranici přípustné množiny mezi body *E* a *H*.

Při uvažování druhé podmínky zjistíme, že neexistuje žádné portfolio, které by nabízelo očekávanou výnosnost vyšší než portfolio *S*, neboť žádný bod přípustné množiny neleží nad vodorovnou přímkou procházející *S*. Podobně neexistuje žádné portfolio, které by nabízelo očekávanou výnosnost nižší než portfolio *G*, neboť žádný bod přípustné množiny neleží pod

OBRÁZEK 7.1
Přípustná a efektivní množina.





OBRÁZEK 7.2

Výběr optimálního portfolia.

vodorovnou přímkou procházející G. Množina portfolií, která nabízejí minimální riziko při různých úrovních výnosnosti je tedy množina portfolií, která leží na „levé" hranici přípustné množiny mezi body G a S.

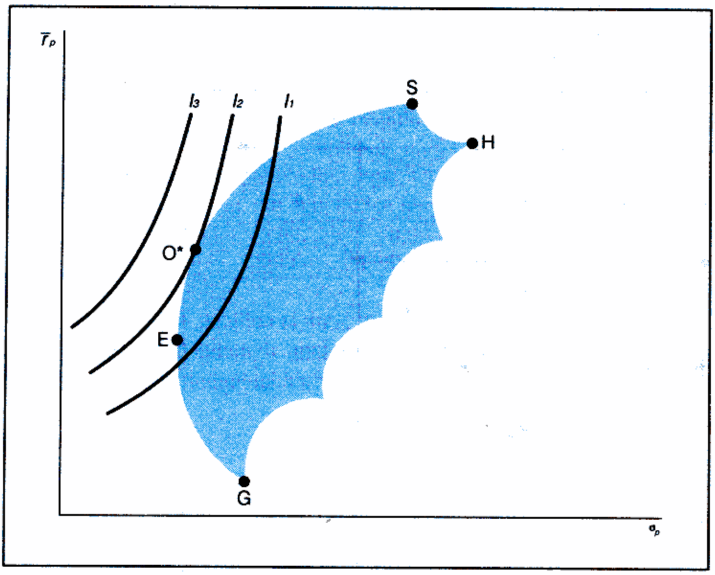
Připomeňme, že pro nalezení efektivní množiny musí být splněny obě podmínky. Pouze portfolia, která leží na „levé horní" hranici přípustné množiny mezi body E a S, tyto podmínky splňují. Tato portfolia tvoří efektivní množinu a právě z této množiny *efektivních portfolií* si bude investor vybírat své optimální portfolio. Všechna ostatní portfolia jsou „neefektivní" a mohou být klidně ignorována.

□ 7.1.3 Výběr optimálního portfolia

Jak investor provede výběr *optimálního portfolia*? Jak je vidět na obrázku 7.2, investor by měl nakreslit své křivky indiference do stejného obrázku jako efektivní množinu a potom vybrat takové portfolio, které leží na křivce indiference, jež je umístěna „nejvýše vlevo". Toto portfolio bude odpovídat bodu, kde se křivka indiference právě dotýká efektivní množiny.[2] Jak je z obrázku vidět, je to portfolio O^* ležící na křivce indiference I_2. Investor by sice ještě více preferoval portfolia na křivce indiference I_3, ale žádná taková neexistují a jde jen o jeho zbožné přání. Na I_1 existuje mnoho portfolií, která by si investor mohl vybrat (například O). Obrázek však ukazuje, že O^* dominuje nad všemi těmito portfolii, protože leží na křivce indiference, která je „výše vlevo". Obrázek 7.3 ukazuje, že investor s vysokým odporem k riziku vybere portfolio blízko bodu E. Obrázek 7.4 ukazuje, že investor, který má jen mírný odpor k riziku, vybere portfolio blízko bodu S.[3]

[2] Dodatek A probírá některé principy použité při určení umístění Markowitzovy efektivní množiny a skladby investorova optimálního portfolia.

[3] Rizikově neutrální investor zvolí portfolio S, zatímco riziko vyhledávající investor si zvolí buď S nebo H.

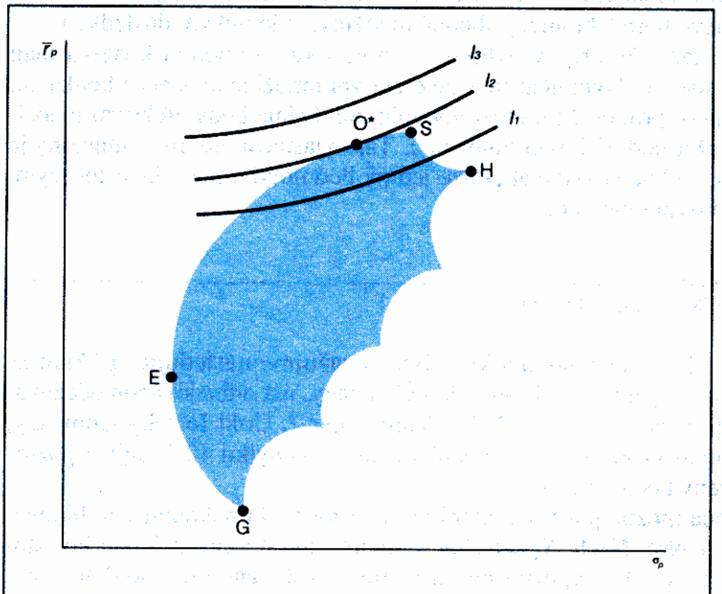


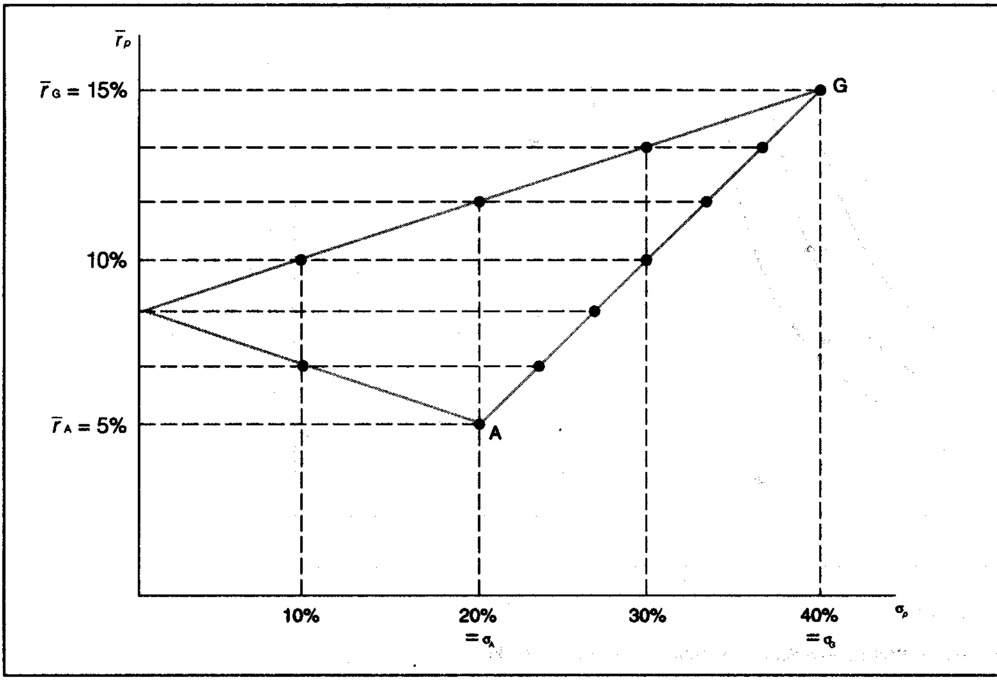
OBRÁZEK 7.3

Výběr portfolia u investora s vysokým odporem k riziku.

OBRÁZEK 7.4

Výběr portfolia u investora s nepatrným odporem k riziku.





OBRÁZEK 7.5

Horní a dolní meze kombinací cenných papírů *A* a *G*.

Na základě úvah je věta o efektivní množině zcela rozumná. V kapitole 6 bylo ukázáno, že by investor měl zvolit portfolio, které mu umožní dostat se na křivku indiference, která leží „nejvýše vlevo“. Věta o efektivní množině, která říká, že by se investor neměl starat o portfolia, jež neleží na „levé horní“ hranici příhodné množiny, je logickým důsledkem.

V kapitole 6 bylo ukázáno, že křivky indiference investora s odporem k riziku mají kladnou směrnici a jsou konvexní. Nyní ukážeme, že efektivní množina je obecně konkávní, což znamená, že nakreslíme-li přímou čáru mezi libovolnými dvěma body efektivní množiny, bude tato přímá čára ležet pod efektivní množinou. Tato vlastnost efektivní množiny je důležitá, protože znamená, že bude existovat pouze jediný bod dotyku mezi investorovými křivkami indiference a efektivní množinou.

7.2 KONKÁVNOST EFEKTIVNÍ MNOŽINY

Abychom viděli, proč je efektivní množina konkávní, uvažujme následující příklad se dvěma cennými papíry. Cenný papír 1, Ark Shipping Company, má odhadovanou očekávanou výnosnost 5% a směrodatnou odchylku 20%. Cenný papír 2, Gold Jewelry Company, má odhadovanou očekávanou výnosnost 15% a směrodatnou odchylku 40%. Jejich pozice jsou na obrázku 7.5 označeny písmeny *A* a *G*.

Nyní uvažujme všechna možná portfolia, která by investor mohl nakoupit kombinováním těchto dvou cenných papírů. Nechť X_1 označuje proporci investorových fondů investovaných do Ark Shipping a $X_2 = 1 - X_1$ označuje proporci investovanou do Gold Jewelry.

Kdyby si investor koupil jen Ark Shipping, potom $X_1 = 1$ a $X_2 = 0$. Alternativně, kdyby si koupil jen Gold Jewelry, potom $X_1 = 0$ a $X_2 = 1$. Kombinace 0,17 do Ark Shipping a 0,83 do Gold Jewelry je také možná, stejně jako další kombinace 0,33a 0,67 nebo 0,50 a 0,50. Ačkoliv je ještě mnoho dalších možností, budeme uvažovat jen následujících sedm portfolií:

	PORTFOLIO A	PORTFOLIO B	PORTFOLIO C	PORTFOLIO D	PORTFOLIO E	PORTFOLIO F	PORTFOLIO G
X_1	1,00	0,83	0,67	0,50	0,33	0,17	0,00
X_2	0,00	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00

Abychom mohli zvažovat investování do těchto sedmi portfolií, musíme vypočítat jejich očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky. Veškeré potřebné informace pro výpočet očekávaných výnosností těchto portfolií máme po ruce. Při výpočtu musíme použít rovnici (6.3a):

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{2} X_i \bar{r}_i \tag{6.3a}$$

$$= X_1 \bar{r}_1 + X_2 \bar{r}_2$$

$$= (X_1 \text{ x } 5\%) + (X_2 \text{ x } 15\%)$$

Pro portfolia *A* a *G* je tento výpočet triviální, neboť investor nakupuje akcie pouze jedné společnosti. Odpovídající očekávané výnosnosti portfolií *A* a *G* jsou tedy po řadě 5% a 15%. Očekávané výnosnosti portfolií *B*, *C*, *D*, *E* a *F* jsou po řadě:

$$\bar{r}_B = (0{,}83 \text{ x } 5\%) + (0{,}17 \text{ x } 15\%)$$

$$= 6{,}70\%$$

$$\bar{r}_C = (0{,}67 \text{ x } 5\%) + (0{,}33 \text{ x } 15\%)$$

$$= 8{,}30\%$$

$$\bar{r}_D = (0{,}50 \text{ x } 5\%) + (0{,}50 \text{ x } 15\%)$$

$$= 10\%$$

$$\bar{r}_E = (0{,}33 \text{ x } 5\%) + (0{,}67 \text{ x } 15\%)$$

$$= 11{,}70\%$$

$$\bar{r}_F = (0{,}17 \text{ x } 5\%) + (0{,}83 \text{ x } 15\%)$$

$$= 13{,}30\%$$

Při výpočtu směrodatných odchylek těchto sedmi portfolií musíme použít rovnici (6.7):

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2} \tag{6.7}$$

$$= [X_1 X_1 \sigma_{11} + X_1 X_2 \sigma_{12} + X_2 X_1 \sigma_{21} + X_2 X_2 \sigma_{22}]^{1/2}$$

$$= [X_1^2 \sigma_1^2 + X_2^2 \sigma_2^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12}]^{1/2}$$

$$= [(X_1^2 \times 20\%^2) + (X_2^2 \times 40\%^2) + 2X_1 X_2 \sigma_{12}]^{1/2}$$

Pro portfolia *A* a *G* je tento výpočet triviální, neboť investor nakupuje akcie pouze jedné společnosti. Jejich směrodatné odchylky jsou tedy po řadě 20% a 40%.

Směrodatné odchylky pro portfolia *B*, *C*, *D*, *E* a *F* závisejí, jak naznačuje rovnice (6.7), na velikosti kovariancí mezi dvěma cennými papíry. Jak je ukázáno v rovnici (6.5), tento kovarianční člen je roven korelaci mezi dvěma cennými papíry vynásobené součinem jejich směrodatných odchylek:

$$\sigma_{12} = \rho_{12} \times \sigma_1 \times \sigma_2$$

$$= \rho_{12} \times 20\% \times 40\%$$

$$= 800\, \rho_{12}$$

To znamená, že směrodatná odchylka libovolného portfolia sestávajícího z Ark Shipping a Gold Jewelry může být vyjádřena jako:

$$\sigma_p = [(X_1^2 \times 20\%^2) + (X_2^2 \times 40\%^2) + (2X_1 X_2 \times 800\rho_{12})]^{1/2}$$
$$= [400X_1^2 + 1.600X_2^2 + 1.600X_1 X_2 \rho_{12}]^{1/2} \tag{7.1}$$

Uvažujme nejprve portfolio *D*. Směrodatná odchylka tohoto portfolia bude někde mezi 10% a 30%, přesná hodnota bude záviset na velikosti korelačního koeficientu. Jak byly tyto meze 10% a 30% stanoveny? Nejprve si všimněme, že pro portfolio *D* se rovnice (7.1) redukuje na:

$$\sigma_D = [(400 \times 0{,}25) + (1.600 \times 0{,}25) + (1.600 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times \rho_{12})]^{1/2}$$
$$= [500 + 400\rho_{12}]^{1/2} \tag{7.2}$$

Z rovnice (7.2) je zřejmé, že σ_D bude mít minimální hodnotu, když korelační koeficient ρ_{12} bude mít minimální hodnotu. Nyní, když si uvědomíme, že minimální hodnota libovolného korelačního koeficientu je -1, je vidět, že dolní mez pro σ_D je:

$$\sigma_D = [500 + (400 \times -1)]^{1/2}$$

$$= [500 - 400]^{1/2}$$

$$= 10\%$$

Podobně je z rovnice (7.2) zřejmé, že σ_D bude mít maximální hodnotu, když korelační koeficient bude mít maximální hodnotu, která je +1. Horní mez pro σ_D je tedy:

$$\sigma_D = [500 + (400 \times 1)]^{1/2}$$

$$= [500 + 400]^{1/2}$$

$$= [900]^{1/2}$$

$$= 30\%$$

Obecně je z rovnice (7.1) vidět, že pro libovolnou množinu vah X_1 a X_2 se objeví dolní nebo horní mez, když bude korelace mezi dvěma cennými papíry po řadě -1 a +1. Použití stejné analýzy i u ostatních portfolií ukazuje, že jejich dolní a horní meze jsou následující:

	SMĚRODATNÁ ODCHYLKA PORTFOLIA	
Portfolio	Dolní mez	Horní mez
A	20%	20,00%
B	10	23,33
C	00	26,67
D	10	30,00
E	20	33,33
F	30	36,67
G	40	40,00

Tyto hodnoty jsou na obrázku 7.5.

Je zajímavé, že všechny horní meze leží na přímce spojující body *A a G*. To znamená, že libovolné portfolio sestávající z těchto dvou cenných papírů nemůže mít směrodatnou odchylku, která leží vpravo od přímé čáry spojující dva cenné papíry. Směrodatná odchylka naopak musí ležet na této přímé čáře nebo vlevo od ní. Toto zjištění je motivací pro diverzifikaci portfolia. ***Diverzifikace obecně vede ke snížení rizika***, neboť směrodatná odchylka portfolia bude obecně menší než vážený průměr směrodatných odchylek cenných papírů v portfoliu.

Stejně zajímavé je i zjištění, že všechny dolní meze leží na jednom ze dvou přímkových úseků, které vedou z bodu *A* do bodu na svislé ose, který odpovídá 8,30% a potom do bodu *G*. To znamená, že libovolné portfolio, které sestává z těchto dvou cenných papírů nemůže mít směrodatnou odchylku, jejíž hodnoty by ležely vlevo od libovolného z těchto dvou přímkových segmentů. Například portfolio *B* musí ležet na vodorovné čáře, která prochází svislou osou v 6,70%, ale je omezená hodnotami 10% a 23,30%.

Libovolné portfolio vytvořené z těchto dvou cenných papírů bude tedy ležet uvnitř trojúhelníku zobrazeného na obrázku 7.5, přičemž skutečné umístění bude záviset na velikosti korelačního koeficientu mezi těmito dvěma cennými papíry.

A co když budou korelace nulové? V tomto případě se rovnice (7.1) redukuje na:

$$\sigma_p = [(400X_1^2) + (1.600X_2^2) + (1.600X_1X_2 \times 0)]^{1/2}$$

$$= [400X_1^2 + 1600X_2^2]^{1/2}$$

Použitím vhodných vah pro X_1 a X_2 mohou být vypočteny směrodatné odchylky portfolií *B*, *C*, *D*, *E* a *F* následovně:

$$\sigma_B = [(400 \times 0{,}83^2) + (1600 \times 0{,}17^2)]^{1/2}$$

$$= 17{,}94\%$$

$$\sigma_C = [(400 \times 0{,}67^2) + (1600 \times 0{,}33^2)]^{1/2}$$

$$= 18{,}81\%$$

$$\sigma_D = [(400 \times 0{,}50^2) + (1600 \times 0{,}50^2)]^{1/2}$$

$$= 22{,}36\%$$

$$\sigma_E = [(400 \times 0{,}33^2) + (1600 \times 0{,}67^2)]^{1/2}$$

$$= 27{,}60\%$$

$$\sigma_F = [(400 \times 0{,}17^2) + (1600 \times 0{,}83^2)]^{1/2}$$

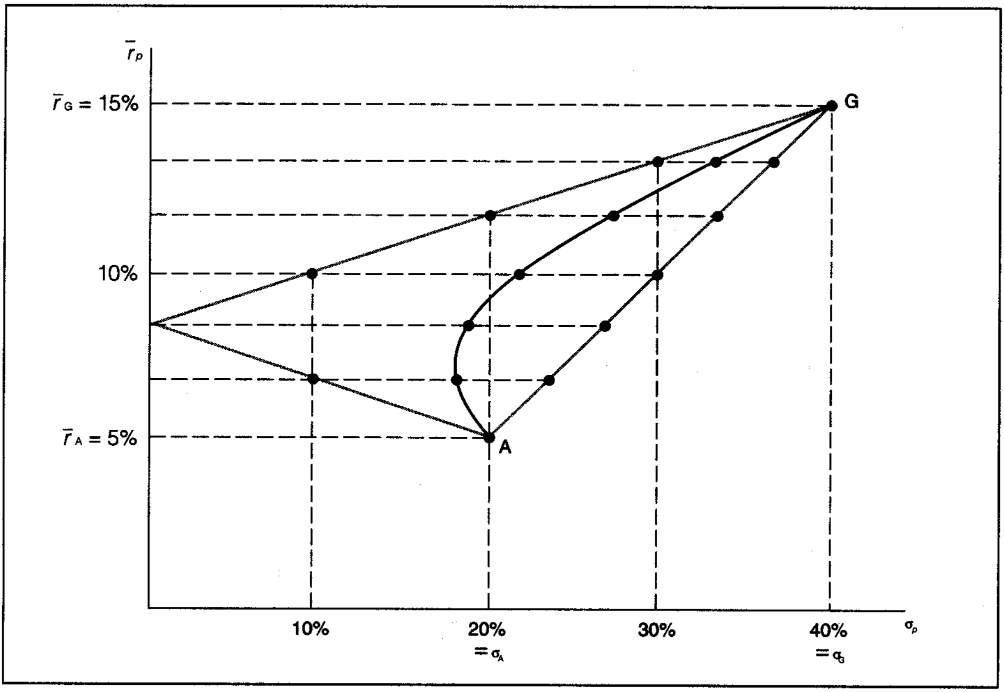
$$= 33{,}37\%$$

Obrázek 7.6 ukazuje umístění těchto portfolií spolu s horními a dolními mezemi, které byly ukázány na obrázku 7.5. Jak je vidět, tato portfolia – stejně jako všechna ostatní portfolia sestávající z Ark Shipping a Gold Jewelry – leží na čáře, která je zakřivena nebo ohnuta vlevo. I když to zde není ukázáno, kdyby korelace byla menší než nula, čára by se zakřivovala více vlevo. Kdyby korelace byla větší než nula, nezakřivovala by se čára tolik doleva. Důležitým momentem na tomto obrázku je, že pokud je korelace menší než +1 a větší než -1, čára reprezentující množinu portfolií tvořených různými kombinacemi uvedených dvou cenných papírů bude mít určitou zakřivenost směrem vlevo. Navíc její „levá horní" část bude konkávní.

I když předchozí příklad používal dva jednotlivé cenné papíry, Ark Shipping a Gold Jewelry, a bral v úvahu všechna možná portfolia, která by mohla být s jejich použitím vytvořena, je důležité si uvědomit, že stejný princip platí i v případě, že dvě portfolia jsou kombinována do třetího portfolia. To znamená, že bod *A* na obrázku 7.6 by mohl představovat portfolio cenných papírů s očekávanou výnosností 5% a směrodatnou odchylkou 20%, zatímco bod *G* by mohl představovat jiné portfolio cenných papírů s očekávanou výnosností 15% a směrodatnou odchylkou 40%. Kombinováním těchto portfolií by vzniklo třetí portfolio, které má očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku v závislosti na proporci investované do *A* a *G*. Za předpokladu, že korelace mezi *A* a *G* je nulová, bude třetí portfolio ležet na zakřivené čáře spojující *A* a *G*.

Při vědomí této skutečnosti můžeme nyní ukázat, proč je efektivní množina konkávní.[4] Jedním způsobem je dokázat, že nemůže mít žádný jiný tvar. Uvažujme efektivní množinu ukázanou na obrázku 7.7. Všimněte si, že v ní je „zoubek" mezi body *U* a *V*. To znamená,

[4] Tato „vlastnost zakřivenosti" může být také použita pro vysvětlení, proč pravá strana přípustné množiny má tvar deštníku jako na obr.7.1.



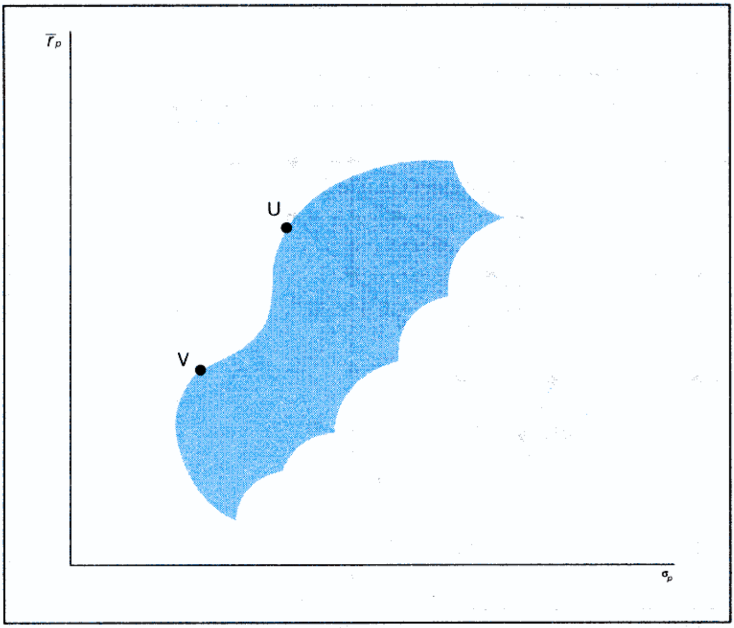
OBRÁZEK 7.6

Portfolia vytvořená kombinováním cenných papírů *A* a *G*.

že na ní existuje oblast, která není konkávní. To nemůže být opravdu efektivní množina, neboť investor by mohl vložit část svých fondů do portfolia v *U a* zbytek do portfolia ve *V*. Výsledné portfolio, kombinace *U* a *V*, by muselo ležet vlevo od údajné efektivní množiny. Tak by nové portfolio bylo „efektivnější" než portfolio se stejnou očekávanou výnosností, které bylo na údajné efektivní množině mezi *U* a *V*.

Uvažujme například portfolio z údajné efektivní množiny, které leží v půli vzdálenosti mezi *U* a *V*; na obrázku 7.8 je označeno jako bod *W*. Kdyby to opravdu bylo efektivní portfolio, potom by nebylo možno vytvořit portfolio se stejnou očekávanou výnosností jako *W*, ale s menší směrodatnou odchylkou. Vložením 50% svých fondů do *U* a 50% do *V* by však investor vytvořil portfolio, které by dominovalo nad *W*, protože by mělo stejnou očekávanou výnosnost, ale menší směrodatnou odchylku. Tato menší směrodatná odchylka může být vysvětlena následovně: Kdyby korelace mezi *U* a *V* byla +1, toto portfolio by leželo na přímce spojující *U a V* a mělo by tedy nižší směrodatnou odchylku než *W*. Na obrázku 7.8 je tento bod označen *Z*. Protože skutečná korelace je nižší než +1, mělo by skutečnou směrodatnou odchylku dokonce nižší než *Z*. To znamená, že údajná efektivní množina byla konstruována chybně, neboť je snadné nalézt „efektivnější" portfolia v oblasti, kde křivka není konkávní.

Při Markowitzově přístupu se předpokládá, že jednotlivá aktiva, která připadají v úvahu pro investování jsou riziková. To znamená, že každé z *N* rizikových aktiv má za dobu držení investorem nejistou výnosnost. Protože žádné z aktiv nemá dokonale negativní korelaci s libovolným jiným aktivem, mají všechna portfolia také nejistou výnosnost za dobu držení investorem a jsou tedy riziková. Navíc při Markowitzově přístupu investor nesmí k nákupu portfolia aktiv použít vypůjčené peníze společně se svým vlastním počátečním bohatstvím. To znamená, že investor nesmí použít finační spekulaci, která byla v kapitole 2 označena jako nákup na úvěr.

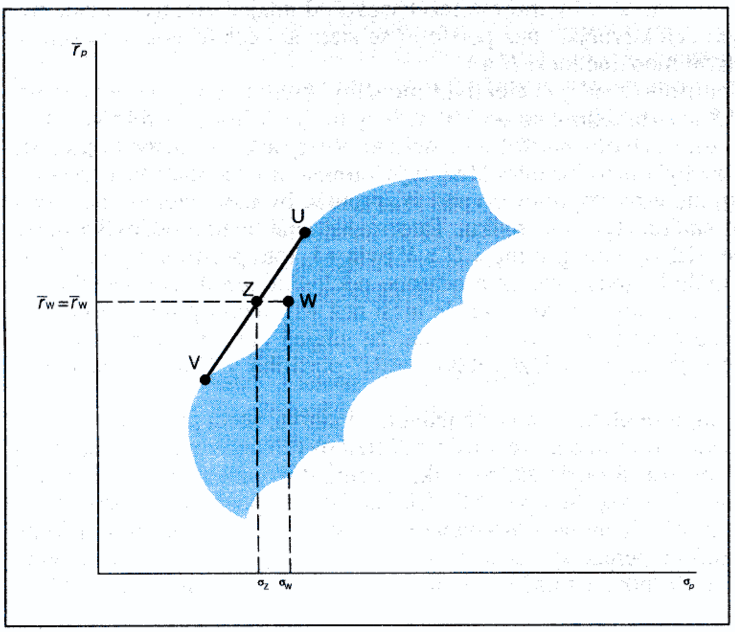


OBRÁZEK 7.7

Konkávnost efektivní množiny.

OBRÁZEK 7.8

Odstranění „zoubku" z efektivní množiny.



Dále je Markowitzův přístup k investování rozšířen nejprve umožněním investorovi investovat nejen do rizikových aktiv, ale také do bezrizikového aktiva. To znamená, že nyní bude k dispozici pro nákup *N* aktiv, která budou sestávat z *N* – 1 rizikových a jednoho bezrizikového aktiva. Potom bude investorovi dovoleno vypůjčovat si peníze, ale za poskytnutý úvěr bude muset platit danou úrokovou sazbu.[5] Následující část uvažuje vliv přidání bezrizikového aktiva k množině rizikových.

7.3 UMOŽNĚNÍ BEZRIZIKOVÉHO INVESTOVÁNÍ

□ 7.3.1 Definování bezrizikového aktiva

Co je přesně *bezrizikové aktivum* v kontextu Markowitzova přístupu? Protože tento přístup používá investování na jednu dobu držení, znamená to, že výnosnost bezrizikového aktiva je jistá. Když tedy investor nakoupí toto aktivum na začátku doby držení, bude přesně vědět, jakou hodnotu bude aktivum mít na konci doby držení. Protože o konečné hodnotě bezrizikového aktiva není žádná pochybnost, je směrodatná odchylka bezrizikového aktiva definována jako nula.

Dále to znamená, že kovariance mezi výnosností bezrizikového aktiva a výnosností libovolného rizikového aktiva je nula. To lze snadno určit připomenutím, že kovariance mezi výnosnostmi libovolných dvou aktiv i a j je rovna součinu koeficientu korelace mezi danými aktivy a směrodatných odchylek těchto dvou aktiv: $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Protože $\sigma_i = 0$, je-li i bezrizikové aktivum, plyne odsud, že $\sigma_{ij} = 0$.

Protože bezrizikové aktivum má podle definice výnosnost jistou, musí toto aktivum být nějakým typem cenného papíru s pevnými příjmy bez možnosti neplnění. Protože všechny cenné papíry korporací mají nějakou pravděpodobnost neplnění závazků, nemůže být bezrizikové aktivum emitováno korporací. Musí to být naopak cenný papír vydaný federální vládou. Ne každý cenný papír emitovaný ministerstvem financí USA je však bezrizikovým cenným papírem.

Uvažujme investora s tříměsíční dobou držení, který nakoupí pokladniční cenný papír splatný za dvacet let. Takový cenný papír je rizikový, neboť investor neví, jakou hodnotu bude cenný papír mít na konci jeho doby držení. Znamená to, že úrokové sazby by se s velkou pravděpodobností mohly nepředvídatelným způsobem měnit během doby držení investorem, a to znamená, že by se nepředvídatelným způsobem změnila tržní cena cenného papíru. Protože přítomnost takového *rizika úrokové sazby* činí hodnotu cenného papíru nejistou, nemůže takový cenný papír být bezrizikovým aktivem. Libovolný pokladniční cenný papír s dobou splatnosti větší než je doba držení investora se také nemůže stát bezrizikovým cenným papírem bez ohledu na to, zda je splatný jeden den nebo 19 3/4 roku po konci doby držení investorem.

Dále uvažujme pokladniční cenný papír, který je splatný před koncem doby držení investorem, například 30denní pokladniční poukázku v případě investora s tříměsíční dobou držení. Za této situace investor na začátku doby držení neví, jaké budou úrokové sazby za 30 dní. To znamená, že investor nezná úrokové sazby, při kterých budou výtěžky ze splatné pokladniční poukázky reinvestovány (tj. „rolovány“) na zbytek doby držení. Přítomnost tohoto *rizika reinvestiční sazby* u všech pokladničních cenných papírů s kratší dobou splatnosti než je doba držení investorem znamená, že tyto cenné papíry nemohou být bezrizikovými aktivy.

---

[5] Zásluhu na rozšíření Markowitzova modelu zahrnutím bezrizikového vypůjčování a investování má James Tobin články „Liquidity Preference as Behavior Towards Risk“ v *Review of Economic Studies* 26, No.1 (February 1958): 65-86 a „The Theory of Portfolio Selection“ v *The Theory of Interest Rates*, ed.F.H.Hahn a F.P.R.Brechling (London: Macmillan, 1965).

Nyní zbývá pouze jeden typ pokladničního cenného papíru, který může být považován za bezrizikové aktivum – pokladniční cenný papír s dobou splatnosti, která přesně odpovídá době držení investorem. Například investor s dobou držení 3 měsíce by zjistil, že pokladniční poukázka se splatností 3 měsíce má určitou výnosnost. Protože tento cenný papír je splatný přesně na konci doby držení, poskytne investorovi v té době peněžní částku, jejíž velikost je na začátku doby držení, kdy má být provedeno investování, přesně známa.[6]

O investování do bezrizikového aktiva se často mluví jako o *bezrizikovém zapůjčení*, neboť taková investice vyžaduje nákup pokladničních poukázek a ten znamená půjčku investora federální vládě.

Po zavedení bezrizikového aktiva je investor nyní schopen vložit část svých peněz do tohoto aktiva a zbytek do libovolného z rizikových portfolií, která jsou v Markowitzově příhodné množině. Přidání těchto nových příležitostí rozšiřuje významně příhodnou množinu a co je důležitější, mění umístění části Markowitzovy efektivní množiny. Podstata těchto změn musí být analyzována, neboť investoři provádějí výběr portfolia z efektivní množiny. Při analýze budeme nejprve uvažovat stanovení očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky u portfolia, které je tvořeno kombinací investice do bezrizikového aktiva s investicí do jednoho rizikového cenného papíru.

□ 7.3.2 Investování do bezrizikového aktiva a do rizikového aktiva

V kapitole 6 jsme předpokládali, že Able, Baker a Charlie mají očekávané výnosnosti a kovariance takové, jako v následujícím vektoru očekávaných výnosností a v kovarianční matici:

$$ER = \begin{bmatrix} 16{,}2 \\ 24{,}6 \\ 22{,}8 \end{bmatrix} \qquad VC = \begin{bmatrix} 146 & 187 & 145 \\ 187 & 854 & 104 \\ 145 & 104 & 289 \end{bmatrix}$$

Po definování bezrizikového aktiva jako cenného papíru číslo 4 budeme uvažovat všechna portfolia, která využívají investování do kmenové akcie Able a do bezrizikového aktiva. Nechť X_1 označuje proporci investorových fondů investovaných do Able a X_4=1-X_1 označuje proporci investovanou do bezrizikového aktiva. Kdyby investor vložil veškeré své peníze do bezrizikového aktiva, potom by bylo X_1=1 a X_4=0. Kombinace 0,25 Able a 0,75 bezrizikového aktiva je také možná, stejně jako kombinace 0,50 a 0,50 nebo 0,75 a 0,25. Ačkoliv jsou ještě další možnosti, zde se zaměříme jen na těchto pět portfolií:

	PORTFOLIO A	PORTFOLIO B	PORTFOLIO C	PORTFOLIO D	PORTFOLIO E
X_1	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
X_2	1,00	0,75	0,50	0,25	0,00

Za předpokladu, že bezrizikové aktivum má výnosnost (často označovanou r_f) 4%, máme po ruce veškeré informace, které potřebujeme pro výpočet očekávané výnosnosti a směrodatných odchylek těchto pěti portfolií. Rovnici (6.3a) můžeme použít k výpočtu očekávané výnosnosti těchto portfolií:

[6] Aby byl opravdu bezrizikový, nesmí cenný papír během doby držení poskytovat svému majiteli žádné kupónové platby. Musí naopak poskytnout investorovi jediný hotovostní tok a tento tok se musí objevit na konci doby držení. Jakékoliv kupónové platby by vnucovaly investorovi riziko reinvestiční sazby, protože hodnota sazby, při které by bylo možno peníze získané z kupónových plateb reinvestovat do konce doby držení, by byla na začátku neznámá. Měli bychom si také všimnout, že diskuse se soustředila na aktivum, které je bezrizikové, pokud jde o nominální hodnotu, neboť přítomnost inflace znamená, že téměř všechny pokladniční cenné papíry jsou rizikové v reálných hodnotách.

$$\bar{r}_P = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{r}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{4} X_i \bar{r}_i \qquad \textbf{(6.3a)}$$

Zatím portfolia *A*, *B*, *C*, *D* a *E* nepoužívají investování do druhého a třetího cenného papíru (tj. Baker a Charlie Company), neboli X_2=0 a X_3=0 v těchto portfoliích. Proto se předchozí rovnice redukuje na :

$$\bar{r}_P = X_1\bar{r}_1 + X_4\bar{r}_4$$

$$= (X_1 \text{ x } 16{,}2\%) + (X_4 \text{ x } 4\%)$$

kde bezriziková sazba je nyní označena $\bar{r}_4$.

Pro portfolia *A* a *E* je výpočet triviální, neboť veškeré investorovy fondy jsou umístěny jen do jednoho cenného papíru. Jejich odpovídající očekávané výnosnosti jsou 4% a 16,2%. Pro portfolia *B*, *C* a *D* jsou očekávané výnosnosti po řadě:

$$\bar{r}_B = (0{,}25 \text{ x } 16{,}2\%) + (0{,}75 \text{ x } 4\%)$$

$$= 7{,}05\%$$

$$\bar{r}_C = (0{,}50 \text{ x } 16{,}2\%) + (0{,}50 \text{ x } 4\%)$$

$$= 10{,}10\%$$

$$\bar{r}_D = (0{,}75 \text{ x } 16{,}2\%) + (0{,}25 \text{ x } 4\%)$$

$$= 13{,}15\%$$

Směrodatné odchylky portfolií *A* a *E* jsou jednoduše po řadě směrodatné odchylky bezrizikového aktiva a Able. Tedy σ_A=0,00 a σ_E=12,08%. Při výpočtu směrodatných odchylek portfolií *B*, *C* a *D* musí být použita rovnice (6.7):

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2} \qquad \textbf{(6.7)}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} X_i X_j \sigma_{ij}\right]^{1/2}$$

Připomeneme-li, že v těchto portfoliích je X_2=0 a X_3=0, redukuje se rovnice na:

$$\sigma_p = [X_1X_1\sigma_{11} + X_1X_4\sigma_{14} + X_4X_1\sigma_{41} + X_4X_4\sigma_{44}]^{1/2}$$

$$= [X_1^2\sigma_1^2 + X_4^2\sigma_4^2 + 2X_1X_4\sigma_{14}]^{1/2}$$

Tato rovnice může být dále upravena, protože cenný papír 4 je bezrizikové aktivum, u kterého podle definice σ_4=0, σ_{14}=0. Výsledek je:

$$\sigma_p = [X_1^2\sigma_1^2]^{1/2}$$

$$= [X_1^2 \text{ x } 146]^{1/2}$$

$$= X_1 \text{ x } 12{,}08\%$$

Směrodatné odchylky portfolií *B*, *C* a *D* jsou tedy:

$$\sigma_B = 0{,}25 \text{ x } 12{,}08\%$$

$$= 3{,}02\%$$

$$\sigma_C = 0{,}50 \text{ x } 12{,}08\%$$

$$= 6{,}04\%$$

$$\sigma_D = 0{,}75 \text{ x } 12{,}08\%$$

$$= 9{,}06\%$$

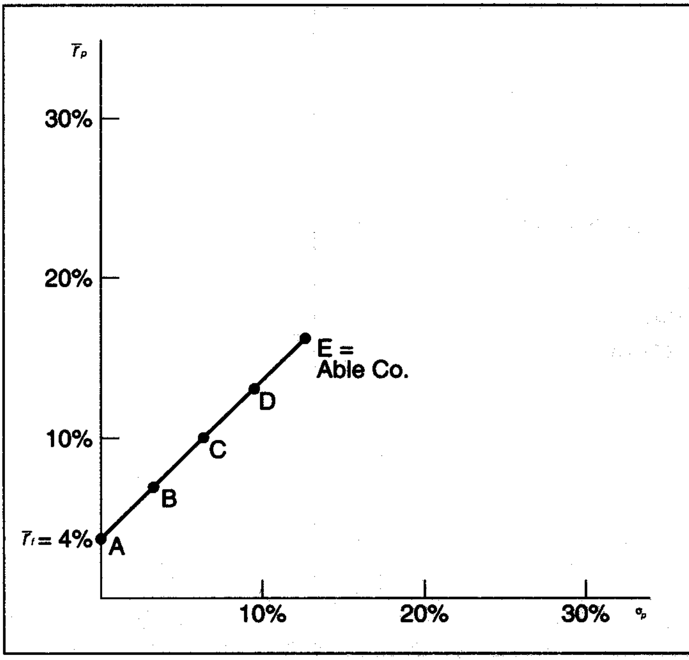
Můžeme shrnout očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky všech pěti portfolií:

PORTFOLIO	X_1	X_4	OČEKÁVANÁ VÝNOSNOST	SMĚRODATNÁ ODCHYLKA
A	0,00	1,00	4,00%	0,00%
B	0,25	0,75	7,05	3,02
C	0,50	0,50	10,10	6,04
D	0,75	0,25	13,15	9,06
E	1,00	0,00	16,20	12,08

Tato portfolia jsou nakreslena na obrázku 7.9. Na tomto obrázku je vidět, že portfolia leží na přímce, která spojuje body reprezentující umístění bezrizikového aktiva a Able. I když zde bylo vyšetřeno pouze pět zvláštních kombinací bezrizikového aktiva a Able, lze ukázat, že libovolná kombinace bezrizikového aktiva a Able bude ležet někde na přímce, která je spojuje; přesné umístění bude záviset na proporcích investovaných do těchto dvou aktiv. Navíc toto pozorování může být zobecněno na kombinace bezrizikového aktiva s rizikovým aktivem. To znamená, že libovolné portfolio, které sestává z kombinace bezrizikového aktiva a rizikového aktiva, bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku takové, že jejich graf bude ležet na přímce, která je spojuje.

□ 7.3.3 Investování do bezrizikového aktiva a do rizikového portfolia

Dále uvažujme, co se stane, když portfolio tvořené více než jedním rizikovým cenným papírem je kombinováno s bezrizikovým aktivem. Uvažujme například rizikové portfolio, které sestává z Able a Charlie v poměru 0,80 a 0,20. Jeho očekávaná výnosnost (označená $\bar{r}_{PAC}$) a směrodatná odchylka (označená σ_{PAC}) jsou rovny:



OBRÁZEK 7.9

Kombinování bezrizikové investice s investicí do rizikového aktiva.

$$\bar{r}_{PAC} = (0{,}80 \text{ x } 16{,}2\%) + (0{,}20 \text{ x } 22{,}8)$$

$$= 17{,}52\%$$

$$\sigma_{PAC} = [(0{,}80 \text{ x } 0{,}80 \text{ x } 146) + (0{,}20 \text{ x } 0{,}20 \text{ x } 289) + (2 \text{ x } 0{,}80 \text{ x } 0{,}20 \text{ x } 145)]^{1/2}$$

$$= 12{,}30\%$$

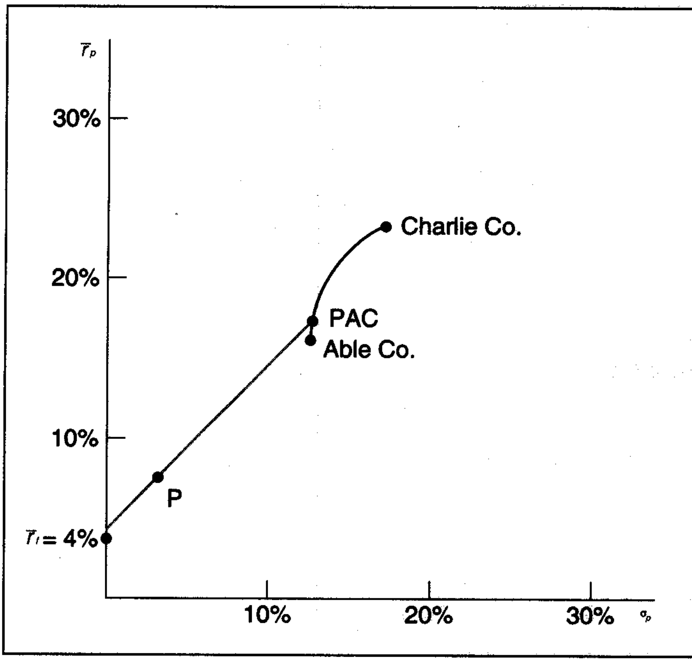
Libovolné portfolio, které je tvořeno investicí jak do *PAC* tak do bezrizikového aktiva bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které mohou být vypočteny stejným způsobem, jaký byl předtím ukázán pro kombinaci jednotlivého rizikového aktiva a bezrizikového aktiva. To znamená, že portfolio, které má poměrnou část X_{PAC} investovanou do portfolia *PAC* a poměrnou část $X_4 = 1 - X_{PAC}$ do bezrizikového aktiva, bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které jsou po řadě rovny:

$$\bar{r}_p = (X_{PAC} \text{ x } 17{,}52\%)) + (X_4 \text{ x } 4\%)$$

$$\sigma_p = X_{PAC} \text{ x } 12{,}30\%$$

Uvažujme investici do portfolia, které je tvořeno *PAC* a bezrizikovým aktivem po řadě v poměru 0,25 a 0,75.[7] Toto portfolio bude mít očekávanou výnosnost:

[7] Všimněte si, že investování proporce 0,25 do portfolia *PAC* je ekvivalentní investování proporce 0.20 (0,25 x 0,80) do Able a proporce 0,05 (0,25 x 0,20) do Charlie.



OBRÁZEK 7.10

Kombinování bezrizikové investice s investicí do rizikového portfolia.

$$\bar{r}_p = (0{,}25 \times 17{,}52\%) + (0{,}75 \times 4\%)$$

$$= 7{,}38\%$$

a směrodatnou odchylku:

$$\sigma_p = (0{,}25 \times 12{,}30\%)$$

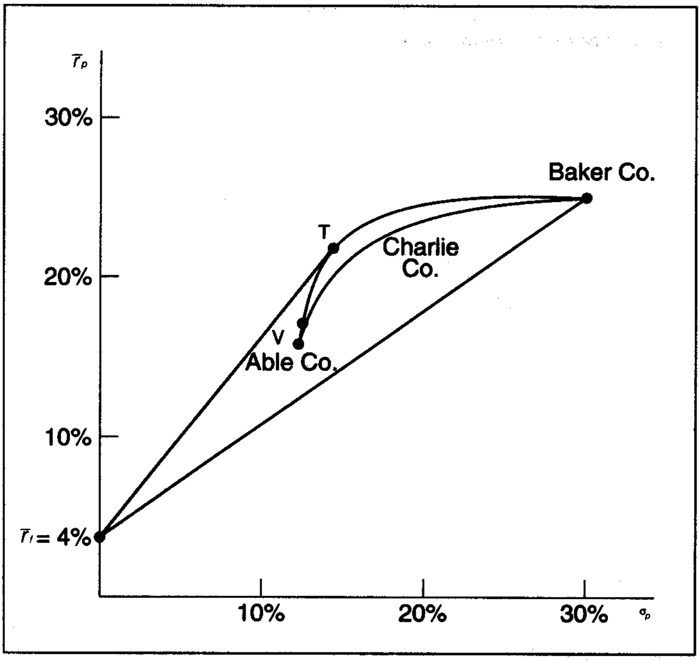
$$= 3{,}08\%$$

Obrázek 7.10 ukazuje, že toto portfolio leží na přímce spojující bezrizikové aktivum a *PAC*. Na přímce je označeno bodem *P*. Další portfolia tvořená různými kombinacemi *PAC* a bezrizikového aktiva budou také ležet na této přímce a jejich přesná poloha bude záviset na proporcích investovaných do *PAC* a do bezrizikového aktiva. Například portfolio, které je tvořeno investováním proporce 0,50 do bezrizikového aktiva a 0,50 do *PAC*, leží na přímce přesně uprostřed mezi oběma koncovými body.

Můžeme shrnout, že kombinování bezrizikového aktiva s libovolným rizikovým portfoliem se neliší od kombinování bezrizikového aktiva s jednotlivým rizikovým cenným papírem. V obou případech má výsledné portfolio očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které leží na přímce spojující oba koncové body.

□ 7.3.4 Vliv bezrizikové investice na efektivní množinu

Jak jsme se již zmínili, přípustná množina se zavedením bezrizikové investice významně změnila. Obrázek 7.11 ukazuje, jak se přípustná množina změní v příkladu, který jsme pro-



OBRÁZEK 7.11

Přípustná a efektivní množina při zavedení bezrizikového investování.

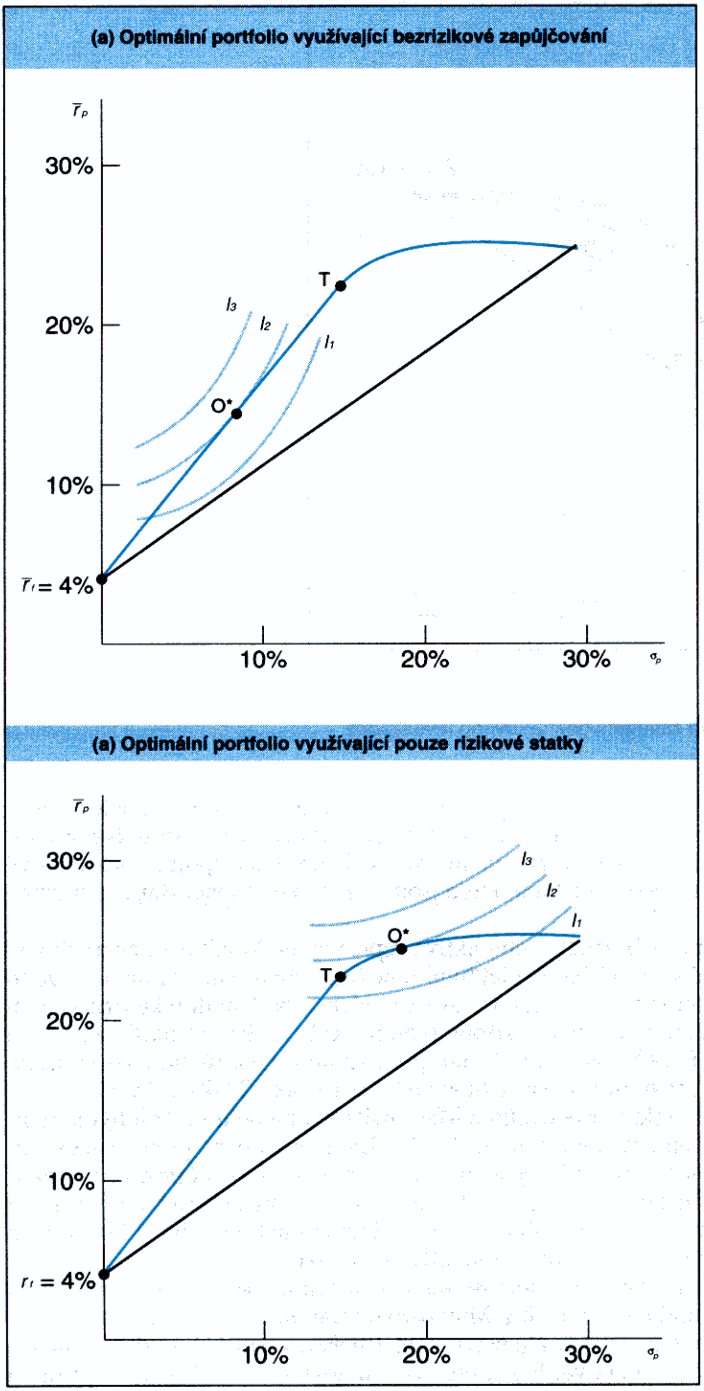
brali. Jsou zde uvažována všechna riziková aktiva a všechna riziková portfolia, nejen pouze Able a *PAC*, společně s bezrizikovým aktivem. Zejména si všimněte, že existují dvě hranice tvořené přímkami vycházejícími z bezrizikového aktiva. Dolní čára spojuje bezrizikové aktivum s Baker. Reprezentuje tedy portfolia, která jsou tvořena kombinací Baker a bezrizikového aktiva.

Druhá přímka vycházející z bezrizikového aktiva reprezentuje kombinaci bezrizikového aktiva a jednoho rizikového portfolia na efektivní množině Markowitzova modelu. Je to čára, která je tečnou efektivní množiny Markowitzova modelu s bodem dotyku označeným *T*. Tento bod dotyku reprezentuje rizikové portfolio tvořené Able, Baker a Charlie v poměru rovném po řadě 0,12, 0,19, 0,69.[8] Dosazením těchto poměrů do rovnic (6.3a) a (6.7) dostaneme po řadě očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku *T* jako 22,4% a 15,2%.

I když i ostatní riziková efektivní portfolia z Markowitzova modelu mohou být kombinována s bezrizikovým aktivem, zaslouží si portfolio *T* zvláštní pozornost, protože neexistuje žádné další portfolio tvořené čistě rizikovými aktivy, které by po spojení přímkou s bezrizikovým aktivem leželo od něho „výše vlevo". Jinými slovy, ze všech přímých čar, které začínají v bezrizikovém aktivu a končí v libovolném rizikovém aktivu nebo v libovolném rizikovém portfoliu nemá žádná větší sklon než ta, která prochází *T*.

To je důležité, neboť část efektivní množiny Markowitzova modelu je ovládnuta touto linií. Konkrétně portfolia z efektivní množiny Markowitzova modelu, která leží mezi portfoliem s minimálním rizikem označeným *V* a portfoliem *T* nejsou efektivní, jestliže je dovoleno investovat do bezrizikového aktiva. Nová efektivní množina je nyní tvořena přímým segmentem a zakřiveným segmentem. Přímý segment je úsečka z bezrizikového aktiva do bodu *T* a sestává z portfolií sestavenými z různých kombinací bezrizikového aktiva a *T*.

[8] Jak jsou tyto váhy určeny je ukázáno v Dodatku A.



OBRÁZEK 7.12

Výběr portfolia využívající bezrizikové investování.

Zakřivený segment je tvořen těmi portfolii, která leží na efektivní množině Markowitzova modelu směrem nahoru od T.

☐ 7.3.5 Vliv bezrizikové investice na výběr portfolia

Obrázek 7.12 ukazuje, jak by se investor měl chovat při výběru optimálního efektivního portfolia při možnosti investování do bezrizikového aktiva současně s investováním do řady rizikových aktiv. Když budou investorovy křivky indiference vypadat tak, jak ukazuje část (a), potom investorovo optimální portfolio O^* bude tvořeno investováním části jeho počátečního bohatství do bezrizikového aktiva a zbytku do portfolia T, protože O^* leží na přímém segmentu efektivní množiny.[9] Alternativně, když bude mít investor menší odpor k riziku a jeho křivky indiference budou vypadat jako ty, které jsou nakresleny v části (b), potom investorovo optimální portfolio O^* nevyužije bezrizikovou investici, protože O^* leží na zakřiveném segmentu efektivní množiny směrem nahoru od T.

7.4 UMOŽNĚNÍ BEZRIZIKOVÉHO VYPŮJČOVÁNÍ

Analýza prezentovaná v předcházející části může být rozšířena o umožnění investorovi vypůjčovat si peníze. To znamená, že investor již není omezen na své počáteční bohatství, když se má rozhodovat, kolik investuje do rizikových aktiv.[10] Když si však investor vypůjčí peníze, musí z půjčky platit úroky. Protože úroková sazba je známa a není žádná pochybnost o splacení půjčky, je na tuto situaci často odkazováno jako na *bezrizikovou půjčku.*

Budeme předpokládat, že úroková sazba účtovaná za půjčku je shodná s úrokovou sazbou, která by mohla být získána investováním do bezrizikové investice.[11] S použitím předchozího příkladu to znamená, že investor má nejen příležitost investovat do bezrizikového aktiva, které poskytuje 4% úrok, ale může si také vypůjčit peníze, za které musí platit úrokovou sazbu 4%.

Vliv, který zavedení bezrizikové půjčky má na umístění a tvar efektivní množiny je stejně významný, jako byl vliv bezrizikové investice. Mělo by však být poznamenáno, že žádný investor nebude chtít současně investovat do bezrizikového aktiva a použít bezrizikovou výpůjčku. Kdyby to udělal, znamenalo by to, že se účastní dvou aktivit i přesto, že stejného výsledku by mohl dosáhnout pouze aktivitou jedinou.

Například investor, který uvažuje o investování \$5.000 do bezrizikového aktiva, aby získal 4% a současně si vypůjčuje \$9.300 při úrokové sazbě 4%, by si mohl jednoduše vypůjčit \$4.300 = \$9.300 – \$5.000. Proto může být investorovi umožněno investovat nebo si vypůjčovat za bezrizikovou sazbu, ne však obojí současně, bez ztráty obecnosti prováděné analýzy.

Dříve byla proporce investovaná do bezrizikového aktiva označena jako X_4 a tato proporce byla omezena na nezáporné číslo mezi 0 a 1. Při možnosti vypůjčit si při stejné sazbě, již X_4 takto omezeno nebude. V dřívějším příkladu měl investor počáteční bohatství \$17.200. Když si investor vypůjčí peníze, bude mít více než \$17.200 na investování do rizikových cenných papírů Able, Baker a Charlie.

---

[9] Investor s větším odporem k riziku (neboli investor, jehož křivky indiference mají větší strmost) by si zvolil optimální portfolio, které leží blíže k bezrizikovému aktivu na přímce, která spojuje bezrizikové aktivum a T. Kdyby měl investor nekonečný odpor k riziku, bylo by optimální portfolio tvořeno pouze investicí do bezrizikového aktiva.

[10] Možnost vypůjčování se dá posuzovat jako investorova příležitost provést nákup na úvěr, jestliže si to přeje. To znamená, že pomocí vypůjčování je investorovi dovoleno použít finanční spekulaci.

[11] Dodatek B se zabývá tím, co se stane s efektivní množinou, když je investor schopen si vypůjčit, ale při sazbě, která je vyšší než sazba, kterou může získat investováním do bezrizikového aktiva. Další modely založené na různých předpokladech jsou v kapitole 4 knihy *Portfolio Analysis* od Gordona J. Alexandera a Jacka Clarka Francise (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1986).

Jestliže si investor například vypůjčí \$4300, bude mít celkem \$17.200 + \$4300 = \$21.500 na investování do těchto cenných papírů. Za této situace se na X_4 dá pohlížet jako na ekvivalent -\$4300/\$17.200 = -0,25. Suma všech podílů však musí být rovna 1. To znamená, že když si investor vypůjčí peníze, potom součet podílů investovaných do rizikových aktiv bude větší než 1. Například vypůjčení \$4300 a investování \$21.500 do Able znamená, že podíl na Able, X_1, je \$21.500/\$17.200 = 1,25. Všimněte si, že v tomto případě $X_1 + X_4 = 1,25 + (-0,25) = 1$.

□ 7.4.1 Vypůjčování a investování do rizikového cenného papíru

Pro vyhodnocení vlivu, který má zavedení bezrizikové půjčky na efektivní množinu, bude příklad prezentovaný v předcházející části rozšířen. Uvažujme portfolia *F, G, H* a *I*, kde si investor vypůjčí část svého počátečního bohatství rovnou po řadě 0,25, 0,50, 0,75 a 1,00. Ve všech čtyřech portfoliích investor investuje všechny vypůjčené fondy a také svoje vlastní fondy do Able. Proporce těchto portfolií mohou být shrnuty následovně:

	PORTFOLIO F	PORTFOLIO G	PORTFOLIO H	PORTFOLIO I
X_1	1,25	1,50	1,75	2,00
X_4	−0,25	−0,50	−0,75	−1,00

Očekávané výnosnosti těchto portfolií jsou vypočteny stejným způsobem jako v předcházející části. To znamená, že bude použita rovnice (6.3a):

$$\bar{r}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{r}_i \tag{6.3a}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} X_i \bar{r}_i$$

$$= X_1 \bar{r}_1 + X_4 \bar{r}_4$$

$$= (X_1 \text{ x } 16{,}2\%) + (X_4 \text{ x } 4\%)$$

Portfolia *F, G, H* a *I* budou tedy mít následující očekávané výnosnosti:

$$\bar{r}_F = (1{,}25 \text{ x } 16{,}2\%) + (-0{,}25 \text{ x } 4\%)$$

$$= 19{,}25\%$$

$$\bar{r}_G = (1{,}50 \text{ x } 16{,}2\%) + (-0{,}50 \text{ x } 4\%)$$

$$= 22{,}30\%$$

$$\bar{r}_H = (1{,}75 \text{ x } 16{,}2\%) + (-0{,}75 \text{ x } 4\%)$$

$$= 25{,}35\%$$

$$\bar{r}_I = (2{,}00 \text{ x } 16{,}2\%) + (-1{,}00 \text{ x } 4\%)$$

$$= 28{,}40\%$$

Podobně jsou vypočteny směrodatné odchylky těchto portfolií použitím rovnice (6.7), stejně jako v předcházející části:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} X_i X_j \sigma_{ij} \right]^{1/2}$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} X_i X_j \sigma_{ij} \right]^{1/2} \tag{6.7}$$

a bylo ukázáno, že se dá upravit na tvar:

$$\sigma_p = X_1 \text{ x } 12{,}08\%$$

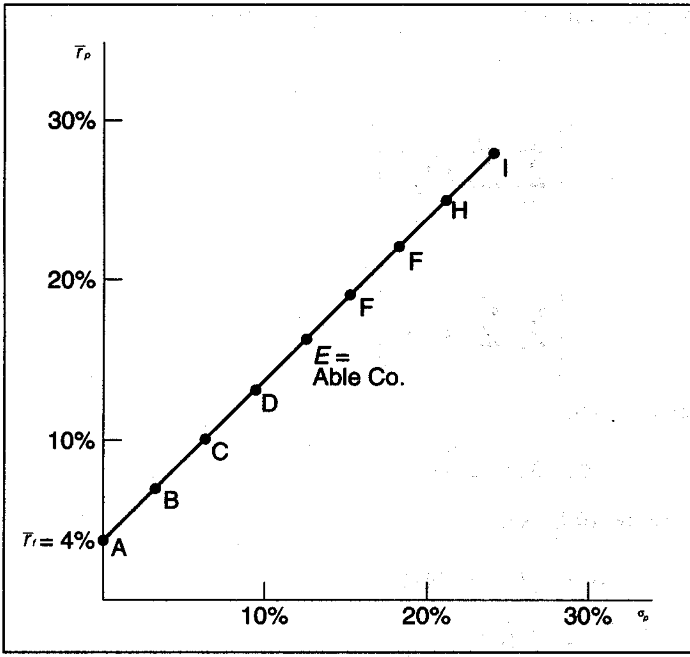
Potom směrodatné odchylky čtyř portfolií jsou:

$$\sigma_F = 1{,}25 \text{ x } 12{,}08\%$$
$$= 15{,}10\%$$
$$\sigma_G = 1{,}50 \text{ x } 12{,}08\%$$
$$= 18{,}12\%$$
$$\sigma_H = 1{,}75 \text{ x } 12{,}08\%$$
$$= 21{,}14\%$$
$$\sigma_I = 2{,}00 \text{ x } 12{,}08\%$$
$$= 24{,}16\%$$

Souhrnně budou mít tato čtyři portfolia, stejně jako pět portfolií, která používají bezrizikové investování, následující střední výnosnosti a směrodatné odchylky:

PORTFOLIO	X_1	X_4	OČEKÁVANÁ VÝNOSNOST	SMĚRODATNÁ ODCHYLKA
A	0,00	1,00	4,00%	0,00%
B	0,25	0,75	7,05	3,02
C	0,50	0,50	10,10	6,04
D	0,75	0,25	13,15	9,06
E	1,00	0,00	16,20	12,08
F	1,25	-0,25	19,25	15,10
G	1,50	-0,50	22,30	18,12
H	1,75	-0,75	25,35	21,14
I	2,00	-1,00	28,40	24,16

Na obrázku 7.13 je vidět, že všechna čtyři portfolia, využívající bezrizikovou půjčku (*F*, *G*, *H* a *I*), leží na stejné přímce, která prochází pěti portfolii používajícími bezrizikové investo-



OBRÁZEK 7.13

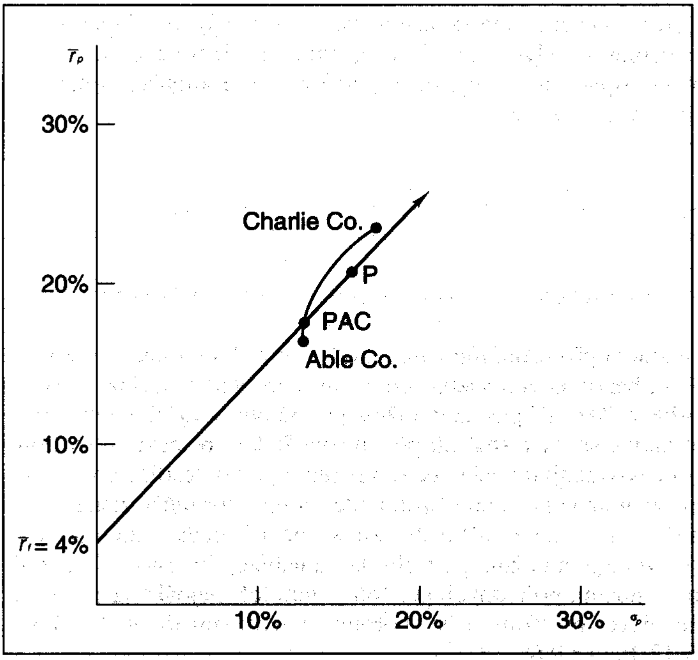
Kombinování bezrizikového vypůjčování a investování s investováním do rizikového aktiva.

vání (*A*, *B*, *C*, *D* a *E*). Navíc, čím větší bude vypůjčená částka, tím dále na této přímce bude portfolio ležet (nebo ekvivalentně, čím menší bude hodnota X_4, tím vzdáleněji bude na přímce portfolio ležet).

I když zde byly vyšetřeny pouze čtyři zvláštní kombinace vypůjčování a investování do Able, lze ukázat, že libovolná kombinace vypůjčování a investování do Able bude ležet někde na této přímce a přesné umístění bude závislé na vypůjčené částce. Navíc může být toto pozorování zobecněno na kombinace bezrizikového vypůjčování a investování do libovolného rizikového statku. To znamená, že vypůjčování za bezrizikovou sazbu a investování všech vypůjčených peněz a investorových vlastních peněz do rizikového aktiva vede k portfoliu, které má očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které leží na prodloužení přímé linie spojující bezrizikovou sazbu a rizikové aktivum.

□ 7.4.2 Vypůjčování a investování do rizikového portfolia

Dále uvažujme, co se stane, když se nakoupí portfolio tvořené více než jedním rizikovým aktivem s použitím jak investorových vlastních fondů tak vypůjčených fondů. Dříve již bylo ukázáno, že portfolio s proporcemi investovanými do Able a Charlie po řadě ve výši 0,80 a 0,20, mělo očekávanou výnosnost 17,52% a směrodatnou odchylku 12,30%. Toto portfolio bylo nazýváno *PAC*. Libovolné portfolio, které používá vypůjčování peněz za bezrizikovou sazbu a následné investování těchto fondů a investorových vlastních fondů do *PAC*, bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které mohou být vypočteny stejným postupem, jaký byl již dříve použit, když bylo zavedeno vypůjčování a byla nakoupena Able. To znamená, že portfolio, které využívá vypůjčení proporce X_4 a investování těchto fondů a všech investorových vlastních fondů do *PAC* bude mít očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku, které jsou po řadě rovny:



OBRÁZEK 7.14

Kombinování bezrizikového vypůjčování a investování s investováním do rizikového portfolia.

$$\bar{r}_p = (X_{PAC} \times 17{,}52\%) + (X_4 \times 4\%)$$

$$\sigma_p = X_{PAC} \times 12{,}30\%$$

Uvažujme například vypůjčení částky peněz rovné 25% investorova počátečního bohatství a následné investování všech investorových vlastních fondů a těchto vypůjčených fondů do *PAC*. Tedy $X_{PAC} = 1 - X_4 = 1 - (-0{,}25) = 1{,}25$.[12] Toto portfolio bude mít očekávanou výnosnost:

$$\bar{r}_p = (1{,}25 \times 17{,}52\%) + (-0{,}25 \times 4\%)$$

$$= 20{,}90\%$$

a směrodatnou odchylku:

$$\sigma_p = (1{,}25 \times 12{,}30\%)$$

$$= 15{,}38\%$$

Na obrázku 7.14 můžeme vidět, že toto portfolio (označené *P*) leží na prodloužení linie, která spojuje bezrizikovou sazbu s *PAC*.

Další portfolia tvořená *PAC* a vypůjčením za bezrizikovou sazbu budou také ležet na

[12] Všimněte si, že investování proporce 1,25 do *PAC* je ekvivalentní investování proporce 1,00 (1,25 x 0,80) do Able a proporce 0,25 (1,25 x 0,20) do Charlie.

tomto prodloužení a jejich přesné umístění bude závislé na velikosti výpůjčky. Vypůjčení za účelem nákupu rizikového portfolia se tedy neliší od vypůjčení za účelem nákupu jednotlivého rizikového aktiva. V obou případech leží výsledné portfolio na prodloužení linie spojující bezrizikovou sazbu s rizikovou investicí.

7.5 UMOŽNĚNÍ BEZRIZIKOVÉHO INVESTOVÁNÍ A VYPŮJČOVÁNÍ

□ 7.5.1 Vliv bezrizikového investování a vypůjčování na efektivní množinu

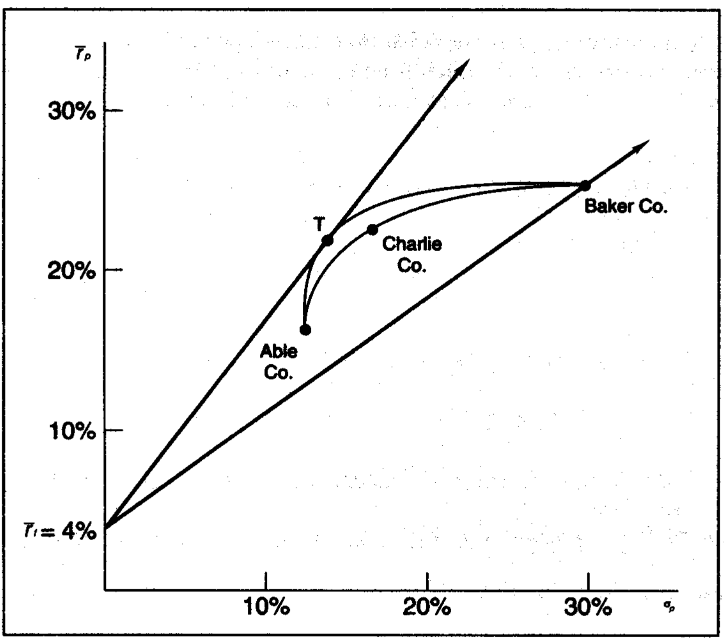
Obrázek 7.15 ukazuje, jak se změní přípustná množina, když je umožněno jak bezrizikové investování, tak vypůjčování za bezrizikovou sazbu. Zde jsou uvažována všechna riziková aktiva a portfolia, ne pouze Able a *PAC*. Přípustná množina je celá oblast mezi dvěma přímkami, které vycházejí z bezrizikové sazby a směřují přes pozici Baker, respektive portfolia označeného *T*. Tyto dvě přímky pokračují do nekonečna směrem vpravo, jestliže předpokládáme, že neexistuje žádné omezení na vypůjčenou částku, kterou investor může získat.

Přímka procházející portfoliem *T* má zvláštní důležitost, neboť představuje efektivní množinu. To znamená, že reprezentuje množinu portfolií, která nabízejí investorovi nejlepší příležitosti, neboť reprezentují množinu příhodných portfolií, která leží nejdále na severozápad. Jak již jsme se zmínili dříve, portfolio *T* je tvořeno investicemi do Able, Baker a Charlie po řadě v poměru 0,12, 0,19 a 0,69.

Stejně jako předtím je přímka procházející *T* tečnou efektivní množiny Markowitzova modelu. Žádné z portfolií kromě *T*, které bylo na efektivní množině Markowitzova modelu, není efektivní, umožníme-li bezrizikové investování a vypůjčování. To je vidět z faktu, že

OBRÁZEK 7.15

Přípustná a efektivní množina při umožnění bezrizikového vypůjčování a investování.



nad každým portfoliem (kromě T), které leží na efektivní množině Markowitzova modelu dominuje portfolio na této přímce. Toto portfolio má stejnou směrodatnou odchylku, ale vyšší očekávanou výnosnost.

□ 7.5.2 Vliv bezrizikového investování a vypůjčování na výběr portfolia

Za předpokladu, že bude mít investor příležitost buď investovat nebo si vypůjčit za bezrizikovou sazbu, určí svoje optimální portfolio zakreslením vlastních křivek indiference do tohoto grafu a označením bodu, v němž se jedna z těchto křivek dotýká lineární efektivní množiny. Obrázek 7.16 znázorňuje dvě alternativní situace. Když investorovy křivky indiference jsou podobné těm v části (a), bude se optimální investorovo portfolio O^* skládat z investice do bezrizikového aktiva a z investice do T. Alternativně, když bude mít investor menší odpor k riziku a bude mít křivky indiference podobné těm v části (b), bude optimální investorovo portfolio O^* tvořeno vypůjčením za bezrizikovou sazbu a investováním těchto a vlastních fondů do T.[13]

7.6 SOUHRN

V této kapitole byla prezentována podstata Markowitzova přístupu k investování. Tento přístup má čtyři stadia. V prvním stadiu začíná investor, který hledá k nákupu optimální portfolio,specifikováním množiny cenných papírů, s níž se může počítat.

Ve druhém stadiu bude analyzovat vyhlídky těchto cenných papírů. Tato činnost je tradičně známa jako analýza cenných papírů. To znamená, že musí být odhadnuty očekávané výnosnosti, rozptyly a kovariance u všech cenných papírů, které připadají v úvahu.

Ve třetím stadiu je stanovena efektivní množina. To spočívá v použití již dříve odhadnutých očekávaných výnosností, rozptylů a kovariancí k určení skladby a umístění efektivních portfolií, která tvoří efektivní množinu. Kdyby byly pro možné investování využity pouze rizikové cenné papíry, efektivní množina by byla tvořena konkávní zakřivenou čarou směřující vzhůru. Po přidání bezrizikových příležitostí se stane efektivní množinou přímka ležící vlevo nahoru od předchozí zakřivené efektivní množiny. Všechna portfolia na této efektivní množině jsou tvořena kombinováním jednoho portfolia tvořeného pouze rizikovými aktivy buď s bezrizikovým investováním nebo s bezrizikovým vypůjčováním. Toto portfolio tvořené výhradně rizikovými aktivy je skutečně jediným portfoliem, které je společné jak pro zakřivenou efektivní množinu, tak pro lineární efektivní množinu.

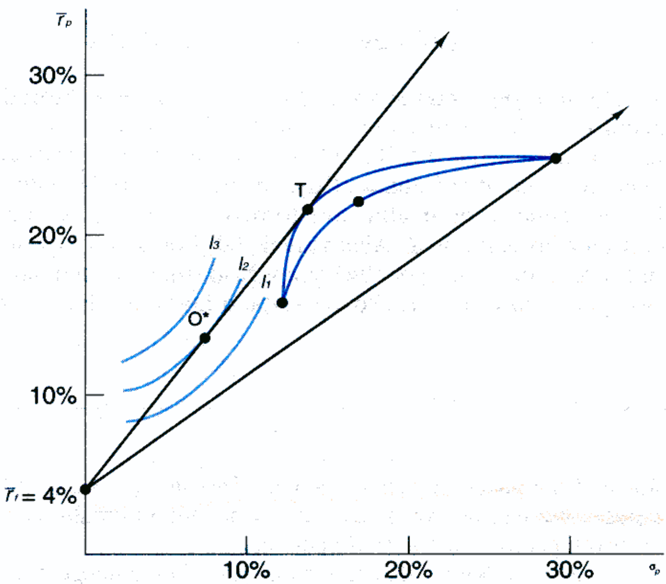
Ve čtvrtém a posledním stadiu probíhá identifikace investorova optimálního portfolia. Ta spočívá v nalezení portfolia, kde se jedna z investorových křivek indiference dotýká efektivní množiny.

Při implementaci Markowitzova přístupu mohou být tato čtyři stadia výběru portfolia realizována různými lidmi. Jeden nebo více analytiků cenných papírů může být zodpovědno za stadium 2, manažer portfolia za stadium 3 a investiční konzultant (poradce) plus investor za stadia 1 a 4.[14] Někteří investoři mohou vykonat některé (nebo všechny) z těchto funkcí sami. Dokonce i v organizacích s velkým počtem zaměstnanců může dojít k určitému překrývání funkcí. Celkově je důležité si uvědomit, že se využívají obsahově odlišné funkce a pro jejich úspěšné dokončení v každém stadiu mohou být vyžadovány dost odlišné dovednosti.

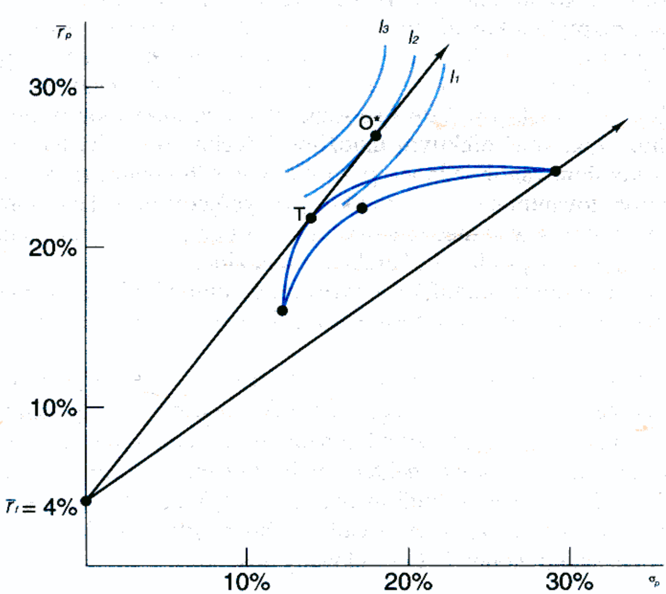
[13] Čím má investor menší odpor k riziku, tím menší je proporce X_f do bezrizikového aktiva a je větší proporce do T (X_T).

[14] Pokud jde o stadium 4, v některých situacích může profesionální poradce nabídnout investorovi alespoň hrubý odhad rizika a výnosnosti pro několik portfolií a požádat o výběr preferované alternativy. V jiných situacích by se poradce mohl pokusit odhadnout investorovu situaci a postoje a podle nich provést volbu za investora. V dalších situacích by mohla organizace hospodařící s penězi popsat množinu pozic riziko - výnosnost, které plánují zaujmout při správě portfolia a potom vyzvat jednotlivce s podobnými postoji k nákupu akcií, které jsou součástí tohoto portfolia.

(a) Optimální portfolio využívající bezrizikového půjčování



(a) Optimální portfolio využívající bezrizikového vypůjčování



OBRÁZEK 7.16

Výběr portfolia při bezrizikovém vypůjčování a investování.

Kapitola 8 využívá model prezentovaný zde, ale uplatňuje značně odlišný pohled. Dosud se výklad soustřeďoval na to, co by ekonomové nazvali normativní model investování. To znamená, že byl prezentován předepisující model, který lidem říká, jak by měli provádět svá investiční rozhodnutí. V dalším vstoupíme do říše pozitivní ekonomie, kde jsou zkoumány důsledky toho, že se všichni řídí uvedenými investičními radami. Při tomto zkoumání se ukáže, že může být odvozen deskriptivní model utváření cen aktiv. Je logické, že se tento model bude nazývat model stanovení cen kapitálových aktiv.

DODATEK A
STANOVENÍ INVESTOROVA OPTIMÁLNÍHO PORTFOLIA

Jestliže má investor uvažovat všechna možná portfolia, která mohou být vytvořena z N cenných papírů, potom musí existovat nějaký způsob, jak určit složení každého z nich (tj. určení vah cenných papírů). Po tomto kroku může být vypočtena očekávaná výnosnost a směrodatná odchylka každého z těchto portfolií a poté může být umístěno portfolio do grafu. V tomto místě může investor pokračovat ve výběru optimálního portfolia zakreslením svých křivek indiference a vyhledáním bodu, který je právě tečný k efektivní množině. Tento dodatek popisuje některé principy používané při stanovení investorova optimálního portfolia. Začíná se zakřivenou množinou Markowitzovy efektivní množiny.

A.1 MARKOWITZŮV MODEL

☐ A.1.1 Určení skladby a umístění efektivní množiny

Dříve již bylo poznamenáno, že investor má k dispozici nekonečný počet možných portfolií, ale že mu stačí zabývat se pouze těmi portfolii, která leží na efektivní množině. Markowitzova efektivní množina je však zakřivená čára, což znamená, že je tvořena nekonečně mnoha body. Z toho vyplývá, že existuje nekonečně mnoho efektivních portfolií! Jak může být Markowitzův přístup použit, když investor musí identifikovat skladbu každého z nekonečně velkého počtu portfolií? Naštěstí není třeba zoufat. Markowitz viděl tento potenciální problém a ve svém hlavním příspěvku prezentoval metodu pro jeho řešení.[15] Spočívá ve využití algoritmu kvadratického programování, který je známý jako *metoda kritické linie.*

Ačkoliv samotný algoritmus přesahuje rámec této knihy, je důležité vědět, co provádí. Na začátku musí investor odhadnout vektor očekávaných výnosností a kovarianční matici. Uvažujme příklad se třemi cennými papíry prezentovaný již dříve v této kapitole.[16] Vektor očekávané výnosnosti označený ER a kovarianční matice označená VC byly odhadnuty na:

$$ER = \begin{bmatrix} 16{,}2 \\ 24{,}6 \\ 22{,}8 \end{bmatrix} \qquad VC = \begin{bmatrix} 146 & 187 & 145 \\ 187 & 854 & 104 \\ 145 & 104 & 289 \end{bmatrix}$$

Algoritmus potom identifikuje řadu *ovládajících portfolií*, která jsou přidružena těmto cenným papírům a popisují efektivní množinu. Ovládající portfolio je efektivní portfolio

[15] Viz Harry Markowitz, „The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints", *Naval Research Logistics Quarterly* 3, No.1-2 (March-June 1956): 111-133.

[16] Tento příklad se opírá o jednu z Markowitzových knih nazvanou *Portfolio Selection* (New Haven, Conn.: Yale University Press, 1959), 176-85.

s následující vlastností: Výsledkem libovolné kombinace dvou přilehlých ovládajících portfolií je portfolio, které leží na efektivní množině mezi těmito dvěma ovládajícími portfolii. Co to znamená, je ukázáno na příkladu.

Algoritmus začíná určením portfolia s nejvyšší očekávanou výnosností. Toto portfolio odpovídá bodu S na obrázku 7.1 a je efektivním portfoliem. Je složeno pouze z jednoho cenného papíru – cenného papíru s nejvyšší očekávanou výnosností. To znamená, že kdyby investor chtěl nakoupit toto portfolio, jediné, co by musel udělat, by bylo nakoupit akcie společnosti, která má nejvyšší očekávanou výnosnost. Jakékoliv jiné portfolio by mělo nižší očekávanou výnosnost, protože alespoň část investorových fondů by byla umístěna do akcií jiných společností, což by mělo za následek nižší očekávanou výnosnost portfolia než má S.

V příkladu je společnost s nejvyšší očekávanou výnosností druhá v pořadí, Baker Company. Odpovídající efektivní portfolio je první z několika ovládajících portfolií, která algoritmus určí. Jeho složení je dáno následujícím váhovým vektorem označeným $X(1)$:

$$X(1) = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 1{,}00 \\ 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Jeho očekávaná výnosnost a směrodatná odchylka odpovídají očekávané výnosnosti a směrodatné odchylce Baker, které jsou po řadě 24,6% a $(854)^{1/2} = 29{,}22\%$. Na obrázku 7.17 je toto ovládající portfolio označeno $C(1)$.

Potom algoritmus určí druhé ovládající portfolio. Toto portfolio leží na efektivní množině pod prvním ovládajícím portfoliem a má skladbu danou následujícím váhovým vektorem označeným $X(2)$:

$$X(2) = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}22 \\ 0{,}78 \end{bmatrix}$$

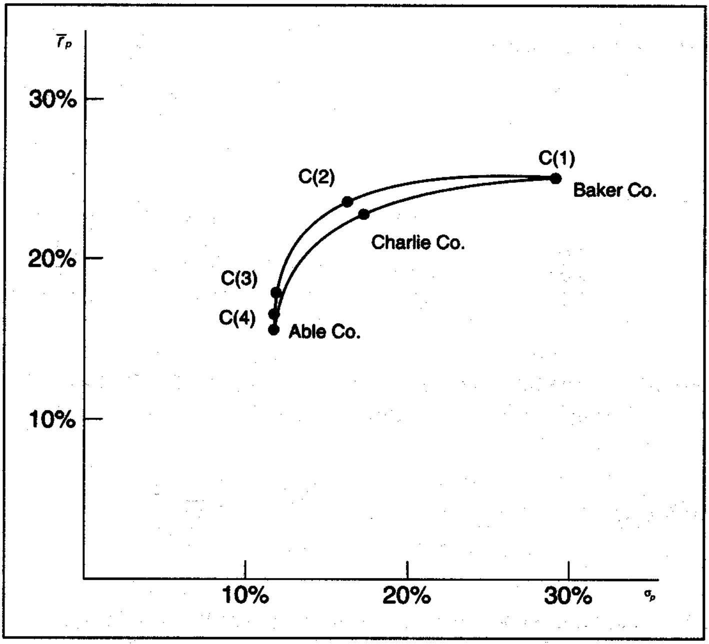
To znamená, že druhé ovládající portfolio je portfolio, v němž dává investor 22% svých fondů do kmenových akcií Baker a zbytek, 78%, do kmenových akcií Charlie. Použitím těchto vah v rovnicích (6.3a) a (6.7) může být vypočítána očekávaná výnosnost a směrodatná odchylka tohoto portfolia; rovnají se po řadě 23,20% a 15,90%. Na obrázku 7.17 je toto ovládající portfolio označeno $C(2)$.

U těchto prvních dvou ovládajících portfolií je důležité, že jsou to *přilehlá* efektivní portfolia a libovolné efektivní portfolio ležící na efektivní množině mezi nimi má složení, které je pouhou kombinací jejich složení. Například efektivní portfolio ležící uprostřed mezi nimi, má následující složení:

$$[0{,}5 \text{ x } X(1)]+[0{,}5 \text{ x } X(2)] = 0{,}5 \text{ x} \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 1{,}00 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} + 0{,}5 \text{ x} \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}22 \\ 0{,}78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}61 \\ 0{,}39 \end{bmatrix}$$

To znamená, že portfolio má váhu 0,61 u akcií Baker a 0,39 u akcií Charlie. Použitím rovnic (6.3a) a (6.7) dostaneme očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku tohoto portfolia, které jsou po řadě 23,9% a 20,28%.

Po určení druhého ovládajícího portfolia určí algoritmus třetí ovládající portfolio. Jeho složení je:



OBRÁZEK 7.17

Ovládající portfolia.

$$X(3) = \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}00 \\ 0{,}16 \end{bmatrix}$$

Tyto váhy mohou být nyní použity k výpočtu očekávané výnosnosti a směrodatné odchylky tohoto portfolia a tyto hodnoty po řadě jsou 17,26% a 12,22%. Jak jsme poznamenali u předchozích dvou ovládajících portfolií, i toto ovládající portfolio je efektivní portfolio a na obrázku 7.17 je označeno $C(3)$.

Protože druhé a třetí portfolio jsou přilehlá portfolia, bude výsledkem jejich libovolné kombinace také efektivní portfolio, které bude ležet na efektivní množině mezi nimi. Vloží-li například investor 33% svých peněz do druhého ovládajícího portfolia a 67% do třetího ovládajícího portfolia, potom bude mít výsledné portfolio následující složení:

$$[0{,}33 \text{ x } X(2)]+[0{,}67 \text{ x } X(3)] = 0{,}33 \text{ x} \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}22 \\ 0{,}78 \end{bmatrix} + 0{,}67 \text{ x} \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}00 \\ 0{,}16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}07 \\ 0{,}36 \end{bmatrix}$$

Použitím rovnic (6.3a) a (6.7) můžeme ukázat, že toto portfolio bude mít očekávanou výnosnost 19,10% a směrodatnou odchylku 12,88%.

Již dříve jsme se zmínili, že pouze kombinace *přilehlých* ovládajících portfolií bude efektivní. To znamená, že kombinace *nepřilehlých* ovládajících portfolií nebude ležet na efektivní množině. Například první a třetí ovládající portfolia nejsou přilehlá, což znamená, že jakákoliv jejich kombinace vytvoří portfolio, které nebude efektivní. Jestliže investor

TABULKA 7.1
Ovládající portfolia pro příklad se třemi cennými papíry.

	VÁHY			OVLÁDAJÍCÍ PORTFOLIO	
Ovládající portfolio	Able Co.	Baker Co.	Charlie Co.	Očekávaná výnosnost	Směrodatná odchylka
C(1)	0,00	1,00	0,00	24,60%	29,22%
C(2)	0,00	0,22	0,78	23,20	15,90
C(3)	0,84	0,00	0,16	17,26	12,22
C(4)	0,99	0,00	0,01	16,27	12,08

například vloží 50% svých fondů do prvého ovládajícího portfolia a 50% fondů do třetího ovládajícího portfolia, bude mít výsledné portfolio následující složení:

$$[0{,}5 \text{ x } X(1)]+[0{,}5 \text{ x } X(3)] = 0{,}5 \text{ x} \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 1{,}00 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} + 0{,}5 \text{ x} \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}00 \\ 0{,}16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}42 \\ 0{,}50 \\ 0{,}08 \end{bmatrix}$$

S těmito váhami lze ukázat, že očekávaná výnosnost a směrodatná odchylka tohoto portfolia budou po řadě rovny 20,93% a 18,38%. Je to však neefektivní portfolio. Protože jeho očekávaná výnosnost (20,93%) leží mezi očekávanou výnosností druhého (23,20%) a třetího (17,26%) ovládajícího portfolia, bude investor schopen kombinováním těchto dvou přilehlých ovládajících portfolií vytvořit efektivní portfolio, které bude mít stejnou očekávanou výnosnost, ale nižší směrodatnou odchylku.[17]

Při pokračování nyní algoritmus určí složení čtvrtého ovládajícího portfolia:

$$X(4) = \begin{bmatrix} 0{,}99 \\ 0{,}00 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}$$

Jeho očekávaná výnosnost a směrodatná odchylka mohou být určeny po řadě jako 16,27% a 12,08%. Po určení tohoto portfolia jako portfolia odpovídajícího bodu E na obrázku 7.1 (a $C(4)$ na obrázku 7.17), což je portfolio s nejmenší směrodatnou odchylkou ze všech přípustných portfolií, se algoritmus zastaví. Čtyři ovládající portfolia shrnutá v tabulce 7.1 úplně popisují efektivní množinu přidruženou akciím Able, Baker a Charlie.

S využitím grafických schopností počítače je nyní jednoduchou záležitostí nakreslit graf efektivní množiny. Počítač může postupovat tak, že nalezne skladbu a následně očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku každého z 20 efektivních portfolií, která jsou rovnoměrně rozmístěna mezi prvním a druhým ovládajícím portfoliem. Potom „spojí body" nakreslením přímé čáry mezi každým z dvaceti po sobě jdoucích portfolií. To dodá grafu vzhled zakřivené čáry jako na obrázku 7.17, protože tato portfolia leží blízko sebe.

[17]V tomto příkladu může být portfolio s očekávanou výnosností 20,93% určeno řešením následující rovnice vzhledem k Y: $(23{,}20\% \text{ x } Y) + [17{,}26\% \text{ x } (1 - Y)] = 20{,}93\%$. Protože se jedná o lineární rovnici o jedné neznámé, řešení je snadné. Řešení $Y = 0{,}62$ ukazuje, že 0,62 svých fondů do druhého ovládajícího portfolia a 0,38 (1,00 - 0,62) do třetího ovládajícího portfolia získá investor portfolio se stejnou očekávanou výnosností, ale nižší směrodatnou odchylkou (14,09%) než portfolio sestávající z 50-50 kombinace prvního a třetího ovládajícího portfolia.

Podobným způsobem bude lokalizováno 20 efektivních portfolií mezi druhým a třetím ovládajícím portfoliem a bude nakreslen odpovídající segment efektivní množiny. Stejný postup bude potom opakován pro oblast mezi třetím a čtvrtým ovládajícím portfoliem, čímž bude vykreslení efektivní množiny dokončeno.

□ A.1.2 Určení skladby optimálního portfolia

Jakmile bylo určeno umístění a skladba Markowitzovy efektivní množiny, může být stanovena skladba investorova optimálního portfolia. Toto portfolio, na obr. 7.2 označené O^*, odpovídá bodu dotyku efektivní množiny s jednou z investorových křivek indiference. Procedura pro určení jeho skladby začíná grafickým odečtením úrovně jeho očekávané výnosnosti. To znamená, že z grafu může investor odečíst, kde je O^* umístěn, a potom změřit jeho očekávanou výnosnost jednoduše použitím pravítka prodloužením vodorovné čáry až na svislou osu (při použití počítače existuje přesnější způsob, jak to udělat).

Potom může investor určit dvě ovládající portfolia, jejichž očekávané výnosnosti „obklopují" tuto úroveň. To znamená, že investor může určit ovládající portfolio s nejbližší vyšší očekávanou výnosností než je tato úroveň (obklopující ovládající portfolio, které je „nad" [above] O^*) a ovládající portfolio s nejbližší nižší očekávanou výnosností než je tato úroveň (obklopující ovládající portfolio, které je „pod" [below] O^*).

Označíme-li očekávanou výnosnost optimálního portfolia jako $\bar{r}^*$ a očekávané výnosnosti obklopujících portfolií po řadě $\bar{r}^a$ a $\bar{r}^b$, potom skladba optimálního portfolia může být určena řešením následující rovnice vzhledem k Y:

$$\bar{r}^* = (\bar{r}^a \times Y) + [\bar{r}^b \times (1 - Y)] \tag{7.3}$$

Optimální portfolio bude tvořeno Y proporcí ze shora obklopujícího ovládajícího portfolia a $(1 - Y)$ proporcí ze zdola obklopujícího ovládajícího portfolia.

Jestliže v příkladu mělo optimální portfolio očekávanou výnosnost 20%, potom je vidět, že druhé a třetí ovládající portfolio jsou shora a zdola obklopujícími ovládajícími portfolii, neboť mají po řadě očekávané výnosnosti 23,20% a 17,26%. Rovnice (7.3) má potom tvar:

$$20\% = (23{,}20\% \times Y) + [17{,}26\% \times (1 - Y)] \text{ (7.3)}$$

Řešení této rovnice vzhledem k Y vede na $Y = 0{,}46$, což znamená, že optimální portfolio sestává z proporce 0,46 druhého ovládajícího portfolia a z 0,54 třetího ovládajícího portfolia. Přeloženo do velikosti částek investovaných do cenných papírů společností Able, Baker a Charlie to znamená:

$$[0{,}46 \times X(2)]+[0{,}54 \times X(3)] = 0{,}46 \times \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}22 \\ 0{,}78 \end{bmatrix} + 0{,}54 \times \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}00 \\ 0{,}16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}45 \\ 0{,}10 \\ 0{,}45 \end{bmatrix}$$

Investor by tedy měl vložit 45%, 10% a 45% svých fondů po řadě do akcií Able, Baker a Charlie.

Obecněji, jsou-li váhové vektory shora a zdola obklopujících ovládajících portfolií označeny X^a a X^b, potom váhy jednotlivých cenných papírů tvořících optimální portfolio budou rovny $(Y \times X^a) + [(1 - Y) \times X^b]$.

□ A.2.1 Určení skladby a umístění efektivní množiny

Když k Markowitzově modelu přidáme bezrizikové příležitosti, bude efektivní množinou přímka procházející portfoliem *T*. Toto portfolio je známo jako tangenciální portfolio, neboť leží na zakřiveném segmentu Markowitzovy efektivní množiny v bodu, který je tečným bodem přímky vycházejícím z bezrizikové sazby.

Určení skladby a umístění *T* využívá stejných postupů, jaké byly prezentovány již dříve v tomto dodatku. V příkladu na obrázku 7.15 leží portfolio *T* na zakřivené efektivní množině Markowitzova modelu mezi druhým a třetím ovládajícím portfoliem. Tato portfolia jsou uvedena na obrázku 7.17, kde jsou po řadě označena C(2) a C(3). Protože *T* leží mezi těmito dvěma ovládajícími portfolii, jeho skladba je váženým průměrem skladeb C(2) a C(3) (viz tabulka 7.1). Tyto váhy (0,86 u C(2) a 0,14 u C(3)) mohou být stanoveny graficky zaznamenáním očekávané výnosnosti *T*. Konkrétně lze z *T* vést vodorovnou čáru na svislou osu a tam odečíst velikost očekávané výnosnosti.

V tomto příkladu je očekávaná výnosnost 22,4%. Protože *T* leží mezi C(2) a C(3), musí jeho očekávaná výnosnost být váženým průměrem očekávané výnosnosti C(2), shora obklopujícího ovládajícího portfolia, a C(3), zdola obklopujícího ovládajícího portfolia. Jeho složení je s použitím C(2) a C(3) určeno rovnicí (7.3), kde $\bar{r}^*$=22,4%, $\bar{r}^a$=23,20% a $\bar{r}^b$=17,26%:

$$22{,}4\% = (23{,}20\% \times Y) + [17{,}26\% \times (1 - Y)]$$

Řešení této rovnice je $Y = 0{,}86$. *T* se tedy skládá z C(2) a C(3) po řadě v proporcích 0,86 a 0,14.

Přeloženo do velikosti částek investovaných do cenných papírů společností Able, Baker a Charlie to znamená:

$$[0{,}86 \times X(2)]+[0{,}14 \times X(3)] = 0{,}86 \times \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}22 \\ 0{,}78 \end{bmatrix} + 0{,}14 \times \begin{bmatrix} 0{,}84 \\ 0{,}00 \\ 0{,}16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}19 \\ 0{,}69 \end{bmatrix}$$

To znamená, že *T* se skládá z investice 12% do Able, 19% do Baker a 69% do Charlie.

□ A.2.2 Určení skladby optimálního portfolia

Když je určeno umístění a skladba tangenciálního portfolia, může být určeno umístění lineární efektivní množiny. Poté může být stanoveno složení investorova optimálního portfolia. Toto portfolio označené na obrázku 7.16 jako O^* odpovídá bodu dotyku mezi efektivní množinou a jednou z investorových křivek indiference. Postup určení jeho skladby je podobný s postupem popsaným dříve v tomto dodatku pro Markowitzův model. Začíná grafickým určením velikosti očekávané výnosnosti. Investor může jednoduše pomocí pravítka prodloužit vodorovnou čáru procházející O^* až na svislou osu a odečíst velikost očekávané výnosnosti.

Když označíme očekávanou výnosnost optimálního portfolia $\bar{r}^*$ a bezrizikovou sazbu a očekávanou výnosnost tangenciálního portfolia po řadě $\bar{r}_f$ a $\bar{r}_T$, potom může být určeno složení optimálního portfolia řešením následující rovnice vzhledem k *Y*:

$$\bar{r}^* = (\bar{r}_T \times Y) + [r_f \times (1 - Y)] \tag{7.4}$$

Optimální portfolio bude tvořeno proporcí Y z tangenciálního portfolia a $1 - Y$ z bezrizikové sazby. Proporce investovaná do každého rizikového cenného papíru se tedy dá vypočítat jako jeho proporce v T vynásobená Y.

Jestliže bude v tomto příkladu optimální investorovo portfolio odpovídat tomu, které je zobrazeno v části (a) obrázku 7.16, potom $\bar{r}^*=14\%$. Potom bude mít rovnice (7.4) tvar:

$$14\% = (22{,}4\% \times Y) + [4\% \times (1 - Y)] \tag{7.5}$$

neboť $\bar{r}_T=22{,}45\%$ a $\bar{r}_f=4\%$. Řešení rovnice (7.5) je $Y=0{,}54$, což znamená, že optimální portfolio je tvořeno proporcí 0,54 z tangenciálního portfolia a 0,46 z bezrizikové sazby. Přepočtem na velikost investic do cenných papírů společností Able, Baker a Charlie dostaneme:

$$[0{,}54 \times X(T)] = 0{,}54 \times \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}19 \\ 0{,}69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}10 \\ 0{,}37 \end{bmatrix}$$

Investor by tedy měl investovat částku peněz, která se rovná 7%, 10% a 37% svého počátečního bohatství po řadě do akcií společností Able, Baker a Charlie. Dále by měl 46% ze svého počátečního bohatství použít na nákup pokladničních poukázek, bezrizikového aktiva.

Jestliže by alternativně optimální investorovo portfolio odpovídalo portfoliu v části b obrázku 7.16, potom by $\bar{r}^*=27\%$. Rovnice (7.4) by tedy měla tvar:

$$27\% = (22{,}4\% \times Y) + [4\% \times (1 - Y)] \tag{7.6}$$

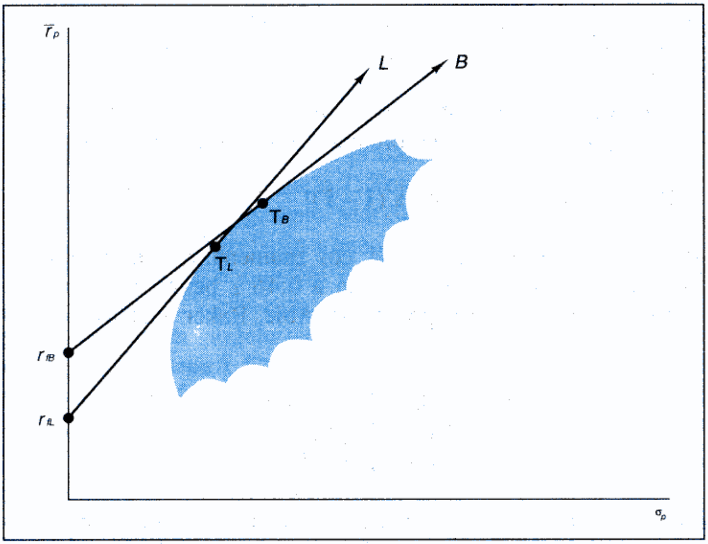
a její řešení by bylo $Y = 1{,}25$, což znamená, že optimální portfolio je tvořeno vypůjčením částky peněz rovné 25% investorova počátečního bohatství a investováním vypůjčených peněz i počátečního bohatství investora do portfolia T. Přeloženo do velikosti částek investovaných do jednotlivých cenných papírů dostaneme:

$$[1{,}25 \times X(T)] = 1{,}25 \times \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}19 \\ 0{,}69 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}15 \\ 0{,}24 \\ 0{,}86 \end{bmatrix}$$

Investor by tedy měl investovat částku peněz rovnou 15%, 24% a 86% svého počátečního bohatství po řadě do akcií Able, Baker a Charlie.

DODATEK B
UMOŽNĚNÍ RŮZNÝCH SAZEB PRO VYPŮJČOVÁNÍ A ZAPŮJČOVÁNÍ

V této kapitole jsme předpokládali, že si investor může vypůjčit peníze za stejnou sazbu, která může být dosažena při investování do bezrizikového aktiva. Výsledkem byla přípustná množina ve tvaru oblasti omezené dvěma přímkami vycházejícími z bezrizikové sazby. Horní čára reprezentovala efektivní množinu a měla jedno portfolio společné se zakřivenou efektivní množinou Markowitzova modelu. Toto portfolio bylo situováno v bodě, kde se přímka vycházející z bezrizikové sazby dotýkala zakřivené efektivní množiny. Nyní se budeme zajímat o to, co se stane, když budeme předpokládat, že si investor může vypůjčit peníze, ale za sazbu, která je větší než sazba, kterou může dostat při investování do bezrizikového aktiva. Sazbu za bezrizikové aktivum označíme r_{fL}, kde L znamená zapůjčování (lending), neboť jak jsme se již dříve zmínili, investování do bezrizikového aktiva je ekviva-



OBRÁZEK 7.18

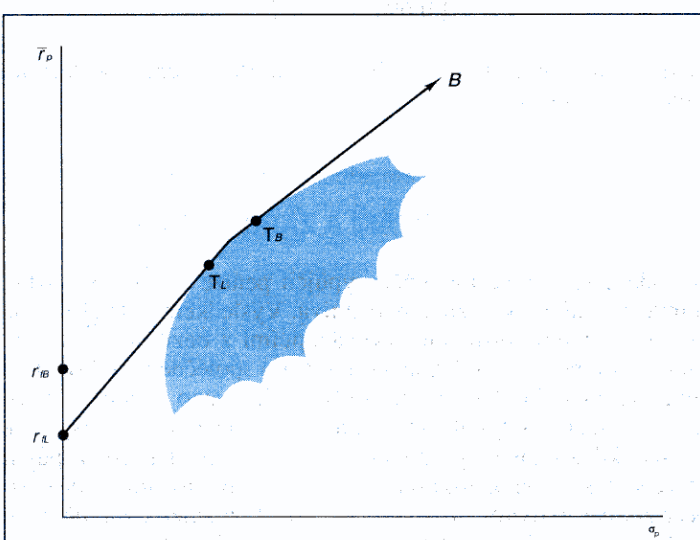
Vyhodnocení různých bezrizikových sazeb.

lentní zapůjčování peněz vládě. Sazbu, při které investor může realizovat vypůjčování (borrowing) peněz, označíme r_{fB} a platí, že $r_{fB} > r_{fL}$.

Jeden ze způsobů, jak porozumět vlivu těchto dvou různých sazeb na efektivní množinu je následující. Nejprve uvažujme, jak by vypadala efektivní množina, kdyby bezrizikové zapůjčování a vypůjčování bylo možné za stejnou sazbu r_{fL}. Výsledná efektivní množina by byla přímka nakreslená na obr. 7.18, která prochází body r_{fL} a T_L.

OBRÁZEK 7.19

Efektivní množina při různých bezrizikových sazbách.



Za druhé uvažujme, jak by vypadala efektivní množina, kdyby bezrizikové zapůjčování a vypůjčování bylo možné za vyšší sazbu r_{fB}. Výsledná efektivní množina by byla přímka nakreslená na obr. 7.18, která prochází body r_{fB} a T_B. Všimněte si, že portfolio T_B leží na Markowitzově efektivní množině nad portfoliem T_L, neboť odpovídá bodu dotyku odpovídajícímu vyšší bezrizikové sazbě.

Za třetí, protože investor si nemůže vypůjčit za r_{fL}, ta část přímky, která vychází z bezrizikové sazby r_{fL} a přesahuje T_L není investorovi dostupná a může tedy být odstraněna.

Za čtvrté, protože investor nemůže zapůjčovat za r_{fB}, ta část přímky, která vychází z bezrizikové sazby r_{fB}, prochází T_B, ale leží vlevo od T_B, není investorovi dostupná a může tedy být také odstraněna. „Levá horní" hranice toho, co zbylo, je ukázána na obrázku 7.19 a tvoří výslednou efektivní množinu.

Tato efektivní množina je tvořena třemi různými, ale spojenými segmenty. Prvním segmentem je přímá čára z r_{fL} do T_L; reprezentuje různé částky bezrizikového půjčování v kombinaci s investováním do portfolia rizikových aktiv označeného T_L. Druhým segmentem je zakřivená čára z T_L do T_B, která reprezentuje různá riziková portfolia, která byla také na Markowitzově zakřivené množině. Třetím segmentem je část přímky přesahující bod T_B; reprezentuje různé vypůjčené částky kombinované s investováním do rizikového portfolia označeného T_B.

Optimální investorovo portfolio bude stejně jako předtím takové portfolio, které odpovídá bodu, v němž se křivka indiference dotýká efektivní množiny. V závislosti na investorových křivkách indiference může tento bod dotyku ležet na libovolném ze tří segmentů, které tvoří efektivní množinu.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Kdy je směrodatná odchylka portfolia rovna váženému průměru směrodatných odchylek cenných papírů tvořících portfolio? Dokažte to matematicky pro portfolio sestávající ze dvou cenných papírů. (*Návod*: Je potřeba provést algebraické úpravy. Připomeňme, že $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$. Vyzkoušejte různé hodnoty ρ_{ij}.)
2. Pomocí pojmů Markowitzova modelu bez bezrizikového vypůjčování a zapůjčování vysvětlete, jak investor určuje své optimální portfolio. Použijte slovní a grafické prostředky. Jakou specifickou informaci investor potřebuje k určení tohoto portfolia?
3. Diskutujte, proč jsou pojmy kovariance a diverzifikace těsně spjaty.
4. Stručně vysvětlete, proč musí být efektivní množina konkávní.
5. Vysvětlete, proč je čistě diskontní vládní cenný papír bez rizika z nezaplacení přece jen rizikový pro investora, jehož doba držení se liší od doby splatnosti cenného papíru?
6. Kovariance mezi bezrizikovým aktivem a rizikovým aktivem je nula. Vysvětlete, proč tomu tak je a dokažte to matematicky.
7. Proč má efektivní množina u Markowitzova modelu rozšířeného o bezrizikové vypůjčování a zapůjčování pouze jeden bod společný s efektivní množinou Markowitzova modelu bez bezrizikového vypůjčování a zapůjčování? Proč nejsou ostatní body ze „staré" efektivní množiny žádoucí? Vysvětlete slovy a graficky.
8. Jak se změní přípustná množina zavedením bezrizikového vypůjčování a zapůjčování do Markowitzova modelu? Vysvětlete slovy a graficky.
9. Je dán následující vektor očekávaných výnosností a kovarianční matice pro tři cenné papíry:

$$ER = \begin{bmatrix} 10{,}1 \\ 7{,}8 \\ 6{,}0 \end{bmatrix} \qquad VC = \begin{bmatrix} 210 & 140 & 0 \\ 140 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a víme, že Pie Traynorovo rizikové portfolio je rozděleno v poměru 50-50 mezi dvě riziková aktiva:

a. Který cenný papír z uvedených tří musí být bezrizikovým aktivem? Proč?

b. Vypočtěte očekávanou hodnotu a směrodatnou odchylku Pieova portfolia.

c. Když bude bezrizikové aktivum tvořit 25% Pieova celkového portfolia, jaká bude očekávaná hodnota a směrodatná odchylka tohoto celkového portfolia?

10. Jaký vliv bude mít na očekávanou výnosnost a směrodatnou odchylku celkového portfolia vypůjčení peněz při bezrizikové sazbě a jejich investování do optimálního rizikového portfolia?

11. Připusťme, že se váš odpor k riziku změnil s tím, jak stárnete (a bohatnete) a že máte nyní menší odpor k riziku. Jak by se změnilo vaše optimální portfolio ve světě bezrizikového vypůjčování a zapůjčování. Změnily by se druhy rizikových cenných papírů, které držíte? Vysvětlete slovy a graficky.

12. (Otázka z dodatku) Co je ovládající portfolio? Proč jsou ovládající portfolia důležitá pro určení skladby efektivní množiny?

13. (Otázka z dodatku) Jak se efektivní množina změní, když jsou podmínky vypůjčování a zapůjčování při téže bezrizikové sazbě zaměněny za vypůjčování při sazbě vyšší, než která může být dosažena při zapůjčování? Vysvětlete slovy a graficky.